FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 8 – (02/2019)

1. Na lista 7, você mostrou que se um comportamento é local no cenário $(2, 2, 2)$, e
$$p\left(0,0|0,0\right) = p\left(0,1|1,0\right) = p\left(1,0|0,1\right) = 0,$$
então $p\left(0,0|1,1\right) = 0$. Mostre agora, seguindo os passos seguintes, que esta implicação não é verdadeira para os comportamentos quânticos.

   (a) Considere um sistema de dois qubits no estado
   $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right).$$
   Se $E_{0|0} = F_{0|0} = |0\rangle\langle 0|$, então $p\left(0,0|0,0\right) = \langle\psi|\, E_{0|0} \otimes F_{0|0}\, |\psi\rangle = 0$, e a primeira condição é satisfeita. Encontre $E_{0|1} = F_{0|1}$ tais que as condições $p\left(0,1|1,0\right) = p\left(1,0|0,1\right) = 0$ sejam satisfeitas. Lembre-se que $p\left(a,b|x,y\right) = p\left(a|b,x,y\right) p\left(b|y\right)$; portanto, se $p\left(a,b|x,y\right) = 0$ e $p\left(b|y\right) \neq 0$, então $p\left(a|b,x,y\right) = \left\langle \phi_{b|y}\right| E_{a|x} \left|\phi_{b|y}\right\rangle = 0$, onde $\left|\phi_{b|y}\right\rangle$ é o estado reduzido do subsistema A após a realização da medição y na parte B, com resultado obtido b.

   (b) Calcule, com $E_{0|1} = F_{0|1}$ encontrados, a probabilidade $p\left(0,0|1,1\right)$.

   (c) Repita o procedimento para o estado
   $$|\psi\rangle = \alpha\left(|01\rangle + |10\rangle\right) + \beta\,|11\rangle,$$
   onde $2\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Calcule o valor de $p\left(0,0|1,1\right)$ em função de α, e obtenha seu valor máximo.

   Esta demonstração ficou conhecida como *paradoxo de Hardy*, e é considerada uma prova forte de não-localidade quântica por não envolver estatísticas de eventos nem desigualdades: se as hipóteses são satisfeitas, uma única observação do evento $0,0|1,1$ é suficiente para provar a presença de não-localidade.

2. Considere, também da lista 7, a seguinte família, a dois parâmetros $\alpha, \beta \in [0,1]$, de comportamentos não-sinalizantes do cenário $(2, 2, 2)$:
$$\mathbf{p}\left(\alpha,\beta\right) = \alpha\mathbf{p}_{PR} + \left(1-\alpha\right)\left[\beta\mathbf{p}_L + \left(1-\beta\right)\mathbf{p}_I\right],$$

onde $\mathbf{p}_L = [p\,(0,0|x,y) = 1,\, \forall\, x,y]$, $\mathbf{p}_I = [p\,(a,b|x,y) = 1/4,\, \forall\, a,b,x,y]$, e $\mathbf{p}_{PR}$ tem componentes:

$$p(a,b|x,y) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } a \oplus b = x.y, \\ 0, & \text{senão.} \end{cases}$$

Através da hierarquia NPA, obtenha numericamente o maior valor de α, em função de β, tal que o comportamento $\mathbf{p}\,(\alpha,\beta)$ pertença ao conjunto $\mathcal{P}_{Q_1}$, e adicione esta nova curva ao gráfico feito na lista 7. Utilize ou a representação de Collins-Gisin, na qual

$$\mathcal{F}_1 = \left\{\mathbb{1}, E_{0|0}, E_{0|1}, F_{0|0}, F_{0|1}\right\},$$

onde $E_{a|x}$ e $F_{b|y}$ são projetores, e, portanto,$E_{a|x}^2 = E_{a|x}$ e $F_{b|y}^2 = F_{b|y}$, ou a representação de correlatores, na qual

$$\mathcal{F}_1 = \{\mathbb{1}, A_0, A_1, B_0, B_1\},$$

onde A_x e B_y tem espectro $\{\pm 1\}$, e, portanto, $A_x^2 = B_y^2 = \mathbb{1}$.

3. Implemente versões do algoritmo *see-saw* para dois qubits para avaliar cotas inferiores para as máximas violações das seguintes desigualdades:

   (a) A *desigualdade CHSH inclinada*,

   $$\alpha \langle A_0 \rangle + \langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle \leq 2 + \alpha,$$

   não é uma faceta do politopo local para $\alpha \neq 0$, mas é muito útil em vários contextos. Obtenha cotas inferiores para o máximo quântico desta desigualdade, em função de $\alpha \in [0,1]$, e faça um gráfico.

   (b) A *desigualdade* I_{3322},

   $$\begin{aligned} &- \langle A_0 \rangle - \langle A_1 \rangle - \langle B_0 \rangle - \langle B_1 \rangle - \langle A_0 B_0 \rangle - \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_2 B_0 \rangle \\ &\qquad - \langle A_0 B_1 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_0 B_2 \rangle + \langle A_1 B_2 \rangle \leq 4, \end{aligned}$$

   é, além de CHSH, a única faceta do politopo local do cenário $(2,3,2)$.

Quatro dicas importantes para a implementação do algoritmo:

- É possível implementar o algoritmo na representação de correlatores, não é necessário reescrever a desigualdade em outra representação.

- No primeiro passo do algoritmo, deve-se sortear operadores de medição para as duas partes. Todo observável O atuando em $\mathbb{C}^2$ de espectro $\{\pm 1\}$ pode ser escrito como $O = 2\,|\varphi\rangle\langle\varphi| - \mathbb{1}$. Portanto, para sortear um observável uniformemente, basta sortear um estado puro $|\varphi\rangle$ uniformemente. Como neste caso $|\varphi\rangle \in \mathbb{C}^2$, e corresponde a um ponto na esfera de Bloch, pode-se sortear ângulos θ e ϕ de forma que o ponto por eles parametrizados seja uniforme na esfera. Pesquise a respeito de sortear pontos uniformemente em uma esfera.
- Construa o observável G associado à desigualdade, obtenha o vetor $|\psi\rangle$ associado ao maior autovalor, e faça $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.
- Com ρ, B_0 e B_1 fixos, o SDP que otimiza A_0 e A_1 é

$$\begin{aligned}
\text{dados} \quad & \rho, B_0, B_1 \\
\text{maximize} \quad & \operatorname{Tr}(\rho G) \\
\text{sujeito a} \quad & A_x + \mathbb{1} \succeq 0,\ \forall\, x \\
& \mathbb{1} - A_x \succeq 0,\ \forall\, x.
\end{aligned}$$

4. (Bônus) Utilize NPA para encontrar cotas superiores para os máximos quânticos das desigualdades do problema anterior. Se o meus testes estão corretos, as cotas de $\mathcal{P}_{Q_1}$ são ruins, e é necessário ir a níveis superiores da hierarquia. Utilize o pacote `NCPOL2SDPA`, para Python.