FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 11 – (02/2019)

1. Considere a desigualdade KCBS

$$D_{KCBS} = E\left(1,2\right) + E\left(2,3\right) + E\left(3,4\right) + E\left(4,5\right) - E\left(1,5\right) \leq 3.$$

Em cenários quânticos,

$$E\left(x_1, x_2\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho A_{x_1} A_{x_2}\right),$$

onde $[A_{x_1}, A_{x_2}] = 0$, e o espectro de A_x é $\{\pm 1\}$, para todo x.

(a) A pureza de um estado quântico é dada por $\mathrm{Tr}\left(\rho^2\right)$. Determine qual é a pureza mínima necessária para que um estado ρ de um qutrit viole a desigualdade KCBS.

(b) Se $A_x = 2\left|v_x\right\rangle\!\left\langle v_x\right| - \mathbb{1}$ para todo x, mostre que A_{x_1} é compatível com A_{x_2} se, e somente se, $\left\langle v_{x_1} \middle| v_{x_2}\right\rangle = 0$ (assumindo-se $\left|v_{x_1}\right\rangle \neq \left|v_{x_2}\right\rangle$). Utilize esta condição para reescrever a desigualdade KCBS em termos dos projetores $\left|v_x\right\rangle\!\left\langle v_x\right|$ somente.

(c) Mostre que é possível obter máxima violação da desigualdade KCBS tomando-se os vetores

$$\left|v_{x_j}\right\rangle = \left[\sin\left(\theta\right)\cos\left(4j\pi/5\right), \sin\left(\theta\right)\sin\left(4j\pi/5\right), \cos\left(\theta\right)\right],$$

para o valor de θ que faz com que as relações de compatibilidade sejam satisfeitas. Encontre, portanto, o valor de θ e o estado $|\psi\rangle$ maximiza a violação da desigualdade.

2. (a) Mostre que a desigualdade

$$\begin{aligned} &p\left(0,0|0,0\right) + p\left(1,1|0,1\right) + p\left(1,0|1,1\right) + p\left(0,0|1,0\right) \\ &\qquad + p\left(1,1|0,0\right) + p\left(0,0|0,1\right) + p\left(0,1|1,1\right) + p\left(1,1|1,0\right) \leq d \end{aligned}$$

é equivalente a CHSH, e obtenha a cota local d. Lembre-se que

$$E\left(x,y\right) = 2p\left(a = b|x,y\right) - 1 = 1 - 2p\left(a \neq b|x,y\right).$$

(b) Desenhe o grafo de exclusividade G da desigualdade, atribuindo os eventos de medição aos vértices de um octógono na ordem em que aparecem na expressão, e diferenciando as arestas que são devidas às exclusividades das medições de Alice das arestas devidas às exclusividades das medições de Bob.

(c) Obtenha $\alpha(G)$ e $\alpha^*(G)$, e verifique que correspondem às cotas local e não-sinalizante de CHSH.

(d) O número de Lovász de um grafo $G = (V, E)$ pode ser eficientemente calculado através do seguinte SDP:

$$\begin{array}{rl} \text{dados} & V, E \\ \max\limits_{B} & \mathrm{Tr}\,(JB) \\ \text{sujeito a} & J_{ij} = 1,\ \forall\, i, j \in V \\ & B \succeq 0 \\ & \mathrm{Tr}\,(B) = 1 \\ & B_{ij} = 0,\ \forall\ (i, j) \in E. \end{array}$$

Calcule o número de Lovász do grafo de exclusividade da desigualdade dada, e verifique que corresponde à cota de Tsirelson de CHSH.