Fundamentos de teoria quântica

Aula 12: Modelos ontológicos

Rafael Rabelo – rabelo@ifi.unicamp.br

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas

Teorias operacionais

Em uma interpretação operacional de uma teoria física, os elementos primitivos são procedimentos de *preparação*, *transformação* e *medição*.

O papel de uma teoria operacional é especificar as probabilidades

$$p\left(a|P, T, M\right)$$

de se obter os diferentes resultados a que podem resultar de uma medição M, dada uma preparação específica P, seguida de uma transformação T.

Equivalência de preparações

Duas preparações P e P' são ditas *equivalentes* se dão origem às mesmas probabilidades para todos os possíveis procedimentos de transformação e medição,

$$p\,(a|P,T,M) = p\,(a|P',T,M)\,,$$

para todos T e M.

Equivalência de medições

Duas medições M e M' são ditas *equivalentes* se dão origem às mesmas probabilidades para todos os possíveis procedimentos de preparação e transformação,

$$p\left(a|P, T, M\right) = p\left(a|P, T, M'\right),$$

para todos P e T.

Equivalência de transformações

Duas transformações T e T' são ditas *equivalentes* se dão origem às mesmas probabilidades para todos os possíveis procedimentos de preparação e medição,

$$p\left(a|P, T, M\right) = p\left(a|P, T', M\right),$$

para todo P e M.

Contexto

Pode-se classificar as características de um procedimento experimental em dois tipos: aquelas que são especificadas pela classe de equivalência do procedimento, e aquelas que não são.

Às características de um procedimento experimental que não são especificadas pela sua classe de equivalência dá-se o nome de *contexto*.

Modelos ontológicos

Um *modelo ontológico* é uma tentativa de se explicar o sucesso de uma teoria operacional a partir da hipótese da existência de sistemas físicos que possuem *atributos*.

Assume-se que tais atributos existam independentemente se são ou não submetidos a teste experimental, ou se algum agente sabe ou não da sua existência.

Estados ônticos

O *estado ôntico* do sistema é a especificação dos valores de cada atributo em um dado instante de tempo.

Denota-se por λ o conjunto completo de variáveis de um modelo ontológico, e por Λ o espaço de valores de λ.

Preparações

Em um modelo ontológico, um procedimento de preparação P é uma preparação do estado ôntico λ.

Em geral, uma preparação P está associada a uma distribuição de probabilidade sobre as variáveis ônticas,

$$\mu_P(\lambda) : \Lambda \mapsto [0, 1],$$

de forma que

$$\int \mu_P(\lambda)\, d\lambda = 1.$$

Medições

Similarmente, em um modelo ontológico um procedimento de medição M é uma medição do estado ôntico λ.

Em geral, dada uma medição M, para cada valor de λ define-se uma *função indicadora* que atribui probabilidades aos resultados a:

$$\xi_{a,M}(\lambda) : \Lambda \mapsto [0,1],$$

de forma que, para todo λ,

$$\sum_a \xi_{a,M}(\lambda) = 1.$$

Transformações

Por fim, em um modelo ontológico um procedimento de transformação T é uma transformação do estado ôntico λ.

Em geral, uma transformação T é representada por uma *matriz de transição* que representa a probabilidade de se passar do estado λ ao estado λ':

$$\Gamma_T\left(\lambda', \lambda\right) : \Lambda \times \Lambda \mapsto [0, 1]\,,$$

de forma que, para todo λ,

$$\int \Gamma_T\left(\lambda', \lambda\right) d\lambda' = 1.$$

Previsões

Um modelo ontológico reproduz as previsões de uma teoria operacional se, para todo P, T e M,

$$p\left(a|P, T, M\right) = \int\int \xi_{a,M}\left(\lambda'\right)\Gamma_{T}\left(\lambda', \lambda\right)\mu_{P}\left(\lambda\right)d\lambda d\lambda'.$$

Não-contextualidade de Spekkens

Um modelo ontológico é dito *não-contextual* se a representação de todo procedimento experimental depende *apenas* de sua classe de equivalência, e não do contexto no qual o procedimento é realizado.

Não-contextualidade de preparação

Um modelo ontológico é dito *não-contextual para preparações* se a representação de toda preparação é independente do contexto, ou seja,

$$\mu_P(\lambda) = \mu_{e(P)}(\lambda),$$

onde $e(P)$ representa a classe de equivalência da preparação P.

Não-contextualidade de preparação na teoria quântica

Na teoria quântica, uma classe de equivalência de uma preparação é determinada pelo estado do sistema quântico, ρ.

Assim, a hipótese de não-contextualidade de preparação para a teoria quântica diz que a distribuição de probabilidades sobre os estados ônticos só depende do estado ρ:

$$\mu_P(\lambda) = \mu_\rho(\lambda).$$

Não-contextualidade de medição

Um modelo ontológico é dito *não-contextual para medições* se a representação de toda medição é independente do contexto, ou seja,

$$\xi_{a,M}(\lambda) = \mu_{a,e(M)}(\lambda),$$

onde $e(M)$ representa a classe de equivalência da preparação M.

Não-contextualidade de medição na teoria quântica

Na teoria quântica, uma classe de equivalência de uma medição é determinada pelo POVM $\left\{E_{a|M}\right\}$.

Assim, a hipótese de não-contextualidade de medição para a teoria quântica diz que a função indicadoras sobre os estados ônticos só depende do POVM $\left\{E_{a|M}\right\}$:

$$\xi_{a,M}(\lambda) = \xi_{a,\left\{E_{a|M}\right\}}(\lambda).$$

Não-contextualidade de transformação

Um modelo ontológico é dito *não-contextual para transformações* se a representação de toda transformação é independente do contexto, ou seja,

$$\Gamma_T(\lambda', \lambda) = \Gamma_{e(T)}(\lambda', \lambda),$$

onde $e(T)$ representa a classe de equivalência da transformação T.

Não-contextualidade de transformação na teoria quântica

Na teoria quântica, uma classe de equivalência de uma transformação é determinada pelo mapa completamente positivo τ.

Assim, a hipótese de não-contextualidade de transformação para a teoria quântica diz que a matriz de transição dos estados ônticos só depende do mapa τ:

$$\Gamma_T\left(\lambda', \lambda\right) = \Gamma_\tau\left(\lambda', \lambda\right).$$

Preparação: propriedade 1

Se duas preparações P e P' são perfeitamente distinguíveis em uma medição *single-shot*, então as distribuições de probabilidades associadas não têm *overlap*:

$$\mu_P(\lambda)\,\mu_{P'}(\lambda) = 0,$$

para todo λ.

Preparação: propriedade 2

Uma combinação convexa de dois procedimentos de preparação P e P' é representada no modelo ontológico por uma combinação convexa das distribuições de probabilidades associadas: se P'' é uma preparação na qual P é realizada com probabilidade p, e P' com probabilidade $(1-p)$:

$$\mu_{P''}(\lambda) = p\mu_P(\lambda) + (1-p)\,\mu_{P'}(\lambda)\,.$$

Contextualidade de preparação na teoria quântica

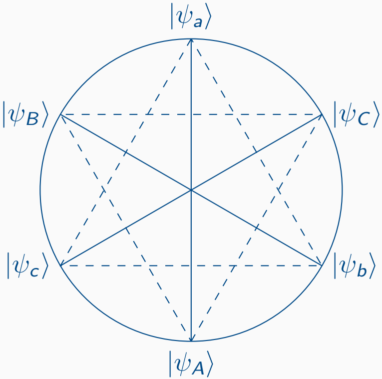
Teorema: a teoria quântica é não-contextual para preparações, no sentido de ser incompatível com modelos ontológicos não-contextuais para preparação.

Prova

Considere os seguintes seis estados puros de um sistema de um qubit:

$$
\begin{aligned}
|\psi_a\rangle &= [1, 0]\,; \\
|\psi_A\rangle &= [0, 1]\,; \\
|\psi_b\rangle &= \left[1/2, \sqrt{3}/2\right]\,; \\
|\psi_B\rangle &= \left[\sqrt{3}/2, -1/2\right]\,; \\
|\psi_c\rangle &= \left[1/2, -\sqrt{3}/2\right]\,; \\
|\psi_C\rangle &= \left[\sqrt{3}/2, -1/2\right]\,.
\end{aligned}
$$

Prova


$|\psi_a\rangle$
$|\psi_B\rangle$
$|\psi_C\rangle$
$|\psi_c\rangle$
$|\psi_b\rangle$
$|\psi_A\rangle$

Prova

Note que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}/2 &= \frac{|\psi_a\rangle\langle\psi_a|}{2} + \frac{|\psi_A\rangle\langle\psi_A|}{2} \\
&= \frac{|\psi_b\rangle\langle\psi_b|}{2} + \frac{|\psi_B\rangle\langle\psi_B|}{2} \\
&= \frac{|\psi_c\rangle\langle\psi_c|}{2} + \frac{|\psi_C\rangle\langle\psi_C|}{2} \\
&= \frac{|\psi_a\rangle\langle\psi_a|}{3} + \frac{|\psi_b\rangle\langle\psi_b|}{3} + \frac{|\psi_c\rangle\langle\psi_c|}{3} \\
&= \frac{|\psi_A\rangle\langle\psi_A|}{3} + \frac{|\psi_B\rangle\langle\psi_B|}{3} + \frac{|\psi_C\rangle\langle\psi_C|}{3}.
\end{aligned}
$$

Prova

Pela propriedade 1:

$$\langle\psi_a|\psi_A\rangle = 0 \Rightarrow \mu_a(\lambda)\,\mu_A(\lambda) = 0;$$
$$\langle\psi_b|\psi_B\rangle = 0 \Rightarrow \mu_b(\lambda)\,\mu_B(\lambda) = 0;$$
$$\langle\psi_c|\psi_C\rangle = 0 \Rightarrow \mu_c(\lambda)\,\mu_C(\lambda) = 0.$$

Prova

Pela propriedade 2:

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbb{1}/2}(\lambda) &= \frac{\mu_a(\lambda)}{2} + \frac{\mu_A(\lambda)}{2} \\
&= \frac{\mu_b(\lambda)}{2} + \frac{\mu_B(\lambda)}{2} \\
&= \frac{\mu_c(\lambda)}{2} + \frac{\mu_C(\lambda)}{2} \\
&= \frac{\mu_a(\lambda)}{3} + \frac{\mu_b(\lambda)}{3} + \frac{\mu_c(\lambda)}{3} \\
&= \frac{\mu_A(\lambda)}{3} + \frac{\mu_B(\lambda)}{3} + \frac{\mu_C(\lambda)}{3}.
\end{aligned}$$

Prova

A única solução para ambos os conjuntos de equações é, para λ fixo:

$$\mu_a(\lambda) = \mu_b(\lambda) = \mu_c(\lambda) = \mu_A(\lambda) = \mu_B(\lambda) = \mu_C(\lambda) = 0.$$

Determinismo de resultados

A hipótese de *determinismo de resultados para medições projetivas* implica que, para medições projetivas (*sharp*), as funções indicadoras devem necessariamente ser determinísticas, ou seja, se M é uma medição *sharp*, então

$$\xi_{a,M}\left(\lambda\right) \in \left\{0, 1\right\},$$

para todo a e λ.

Contextualidade de medição na teoria quântica

Teorema: sob determinismo de resultados para medições projetivas, a teoria quântica é contextual para medições, no sentido de ser incompatível com modelos ontológicos não-contextuais para medições.

Prova

Considere três medições projetivas dicotômicas: $M_a = \{\Pi_a, \Pi_A\}$, $M_b = \{\Pi_b, \Pi_B\}$ e $M_c = \{\Pi_c, \Pi_C\}$, onde $\Pi_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ para $i \in \{a, b, c, A, B, C\}$.

Prova

Por definição,

$$\Pi_a + \Pi_A = \Pi_b + \Pi_B = \Pi_c + \Pi_C = \mathbb{1},$$

e

$$\Pi_a \Pi_A = \Pi_b \Pi_B = \Pi_c \Pi_C = 0.$$

Prova

No modelo ontológico, estas relações implicam, respectivamente, nas relações de normalização

$$\xi_a(\lambda) + \xi_A(\lambda) = \xi_b(\lambda) + \xi_B(\lambda) = \xi_c(\lambda) + \xi_C(\lambda) = 1,$$

e ortogonalidade

$$\xi_a(\lambda)\,\xi_A(\lambda) = \xi_b(\lambda)\,\xi_B(\lambda) = \xi_c(\lambda)\,\xi_C(\lambda) = 0.$$

Prova

Considere agora uma medição realizada pela escolha uniforme entre M_a, M_b e M_c, tomando como resultado um único bit, cujos valores são associados aos rótulos minúsculo e maiúsculo. Seja M a medição efetiva, associada ao POVM

$$M = \left\{ \frac{\Pi_a}{3} + \frac{\Pi_b}{3} + \frac{\Pi_c}{3}, \frac{\Pi_A}{3} + \frac{\Pi_B}{3} + \frac{\Pi_C}{3} \right\}.$$

No modelo ontológico, M é representado pelas funções indicadoras

$$\{\xi_{i,M}, \xi_{I,M}\} = \left\{ \frac{\xi_a}{3} + \frac{\xi_b}{3} + \frac{\xi_c}{3}, \frac{\xi_A}{3} + \frac{\xi_B}{3} + \frac{\xi_C}{3} \right\}.$$

Prova

Note, no entanto, que os efeitos do POVM M são

$$M = \left\{ \frac{\mathbb{1}}{2}, \frac{\mathbb{1}}{2} \right\}.$$

Se o modelo ontológico é não-contextual para medições, as funções indicadoras devem ser

$$\{\xi_{i,M}, \xi_{I,M}\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Prova

As mesmas funções indicadoras devem satisfazer as relações de normalização e ortogonalidade, e, ainda, reproduzir as funções indicadoras da medição efetiva M.

Assumindo-se determinismo de resultados para as medições projetivas, são oito as possíveis soluções determinísticas para os sistemas que representam as relações de normalização e ortogonalidade. No entanto, nenhuma delas reproduz as funções indicadoras da medição M.

ψ-onticidade

Seja λ uma variável que assume valores no conjunto Λ, e assuma que a preparação de um estado quântico $|\psi_i\rangle$ resulta no sorteio de λ de acordo com uma distribuição de probabilidades $\mu_i(\lambda)$ sobre Λ.

Um modelo ontológico para a teoria quântica é dito ψ-*ôntico* se, para todo par $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ de estados quânticos distintos, as distribuições de estados ônticos correspondentes $\mu_0(\lambda)$ e $\mu_1(\lambda)$ não têm *overlap*.

ψ-epistemicidade

Um modelo ontológico para a teoria quântica é dito ψ-*epistêmico* se não é ψ-ôntico, ou seja, se existe um par $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ de estados quânticos distintos cujas preparações podem dar origem ao mesmo estado ôntico λ.

O postulado da independência de preparações

O *postulado da independência de preparações* implica que, se é possível preparar n sistemas quânticos independentemente nos estados $|\psi_{x_1}\rangle, \ldots, |\psi_{x_n}\rangle$, então os estados ônticos $\lambda_{x_1}, \ldots, \lambda_{x_n}$ são preparados de acordo com a distribuição produto

$$\mu_{x_1}(\lambda) \ldots \mu_{x_n}(\lambda).$$

O teorema de Pusey-Barrett-Rudolph

O *teorema de Pusey-Barrett-Rudolph* (PBR) enuncia que, sob o postulado da independência de preparações, todo modelo ontológico que reproduz as previsões da teoria quântica é ψ-ôntico.

Prova

Considere duas possíveis preparações de um sistema quântico de um qubit, que resultam nos estados $|0\rangle$ e $|+\rangle$.

Suponha que as distribuições $\mu_{|0\rangle}(\lambda)$ e $\mu_{|+\rangle}(\lambda)$ tenham uma região Δ de *overlap*, de forma que, ao se preparar o sistema em qualquer um dos estados, existe uma probabilidade maior que q de que $\lambda \in \Delta$.

Prova

Assuma que seja possível preparar independentemente duas cópias do sistema nos estados $|\psi_1\rangle = |00\rangle$, $|\psi_2\rangle = |0+\rangle$, $|\psi_3\rangle = |+0\rangle$, $|\psi_4\rangle = |++\rangle$.

Pelo postulado da independência de preparações, existe uma probabilidade maior que q^2 de que, para qualquer uma das quatro preparações, os estados ônticos de ambos os sistemas estejam na região de *overlap* Δ.

Prova

Considere uma medição projetiva cujos projetores são associados aos seguintes estados puros:

$$|\xi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|01\rangle + |10\rangle \right),$$
$$|\xi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0-\rangle + |1+\rangle \right),$$
$$|\xi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+1\rangle + |-0\rangle \right),$$
$$|\xi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+-\rangle + |-+\rangle \right).$$

Note que $\langle \xi_i | \psi_i \rangle = 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, então para a preparação $|\psi_i\rangle$, o resultado associado ao estado $|\xi_i\rangle$ nunca ocorre.

Prova

Em um modelo ontológico, porém, a probabilidade do resultado de uma medição só depende do estado ôntico λ.

Em pelo menos em q^2 das vezes, o aparato da medição não saberá qual das preparações foi realizada, e poderá dar um dos resultados impossíveis, gerando uma contradição.