FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 11 – (02/2019)

1. Considere o modelo ontológico para a teoria quântica devido a Beltrametti e Bugajski. Nele, os estados ônticos são os estados puros do sistema quântico – por isso, serão denotados ψ ao invés de λ –, e uma preparação associada a um operador densidade puro $|\psi'\rangle\langle\psi'|$ é representada por

$$\mu_{|\psi'\rangle}\left(\psi\right) = \delta\left(\psi - \psi'\right).$$

Uma preparação associada a uma mistura de estados puros $|\psi'\rangle\langle\psi'|$ com respectivas probabilidades $p\left(\psi'\right)$ é representada por

$$\mu\left(\psi\right) = \int p\left(\psi'\right)\delta\left(\psi - \psi'\right)d\psi',$$

onde $d\psi$ representa a medida invariante por unitárias no espaço de Hilbert. Por fim, uma medição do POVM $\{E_a\}$ é associada ao conjunto de funções indicadoras $\{\xi_a\left(\psi\right)\}$ definidas por

$$\xi_a\left(\psi\right) = \mathrm{Tr}\left(E_a\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|\right).$$

   (a) Mostre que o modelo ontológico reproduz as previsões da teoria quântica.

   (b) Classifique o modelo em relação a sua contextualidade de preparação e medição, e justifique.

   (c) Discuta como as respostas do item anterior estão relacionadas com os teoremas *no-go* de não-contextualidade para modelos ontológicos da teoria quântica.

2. A *toy theory* de Spekkens é um modelo ontológico ψ-epistêmico que explica uma vasta gama de fenômenos quânticos. Considere esta teoria em sua forma mais simples, conhecida como *toy bit*, que se aplica a qubits que podem ser preparados nos 6 estados puros $|\pm x\rangle$, $|\pm y\rangle$, $|\pm z\rangle$, autoestados dos operadores de Pauli σ_x, σ_y e σ_z, respectivamente, e que podem, também, ser submetidos a medições projetivas dos mesmos operadores.

   O espaço de estados do *toy bit* é discreto e possui quatro estados ônticos, $\lambda \in \{(-,-),(-,+),(+,+),(+,-)\}$. Estes estados podem ser convenientemente representados como regiões no plano xy, como ilustrado na fig. 2.

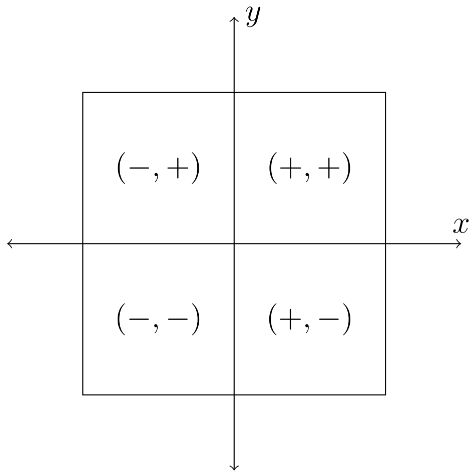

Figura 1: Espaço de estados do *toy bit*.

As distribuições associadas às preparações dos seis estados quânticos são

$$\begin{aligned}
\mu_{|\pm x\rangle}\left(\lambda\right) &= \frac{1}{2}\delta_{\lambda,(\pm,-)} + \frac{1}{2}\delta_{\lambda,(\pm,+)};\\
\mu_{|\pm y\rangle}\left(\lambda\right) &= \frac{1}{2}\delta_{\lambda,(-,\pm)} + \frac{1}{2}\delta_{\lambda,(+,\pm)};\\
\mu_{|\pm z\rangle}\left(\lambda\right) &= \frac{1}{2}\delta_{\lambda,(-,\mp)} + \frac{1}{2}\delta_{\lambda,(+,\pm)}.
\end{aligned}$$

As funções indicadoras associadas às medições dos observáveis são

$$\begin{aligned}
\xi_{\pm,\sigma_x}\left(\lambda\right) &= \delta_{\lambda,(\pm,-)} + \delta_{\lambda,(\pm,+)};\\
\xi_{\pm,\sigma_y}\left(\lambda\right) &= \delta_{\lambda,(-,\pm)} + \delta_{\lambda,(+,\pm)};\\
\xi_{\pm,\sigma_z}\left(\lambda\right) &= \delta_{\lambda,(-,\mp)} + \delta_{\lambda,(+,\pm)}.
\end{aligned}$$

Assim como na teoria quântica, após a realização de uma medição o sistema é repreparado no estado quântico associado ao resultado da medição.

(a) Represente graficamente as distribuições associadas às preparações e as funções indicadoras associadas às medições.

(b) Mostre que, para dois estados $|\psi\rangle\,, |\phi\rangle \in \{|\pm x\rangle\,, |\pm y\rangle\,, |\pm z\rangle\}$,

$$\int \mu_{|\psi\rangle}\left(\lambda\right)\mu_{|\phi\rangle}\left(\lambda\right) d\lambda = \left|\langle\psi|\phi\rangle\right|^2.$$

Na teoria quântica, dois estados não-ortogonais são indistinguíveis. Como o resultado acima pode ser utilizado para explicar este fato dentro do modelo ontológico?

(c) Na teoria quântica, ao contrário da mecânica clássica, um estado misto admite mais de uma decomposição como combinação convexa de estados puros. Como o modelo do *toy bit* explica este fato? Utilize o estado maximamente misto do qubit para ilustrar sua resposta.

(d) Um importante resultado na teoria quântica da informação é o *teorema da não-clonagem*. No modelo ontológico, uma máquina de clonagem copia perfeitamente o estado ôntico do sistema. Mostre como o *toy bit* pode explicar o teorema da não-clonagem para os estados $|+x\rangle$ e $|+y\rangle$.