Aula 1

Números complexos

Rafael Rabelo

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Motivação

Aplicações

- Matemática:
    - álgebra;
    - geometria;
    - sistemas dinâmicos.
- Matemática aplicada:
    - teoria de controle;
    - análise de sinais.
- Física:
    - teoria quântica;
    - teoria eletromagnética;
    - dinâmica de fluidos;
    - relatividade.

Teorema fundamental da álgebra

Uma função polinomial de grau n, de uma única variável e coeficientes complexos, tem exatamente n raízes complexas, se as degenerescências forem devidamente contadas.

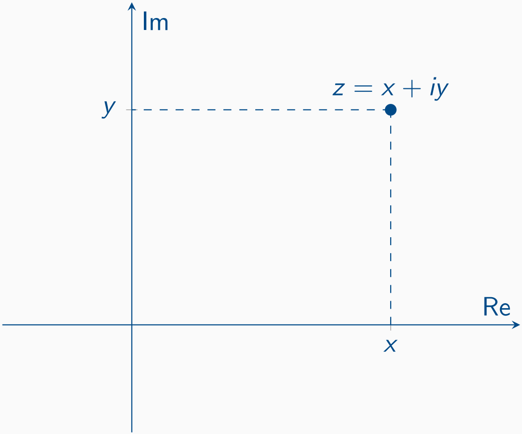
Definição

Definição

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é definido como

$$\mathbb{C} = \{z \,|\, z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}\}, \text{ onde } i = \sqrt{-1}.$$

Diagrama de Argand



Álgebra complexa

Adição e subtração

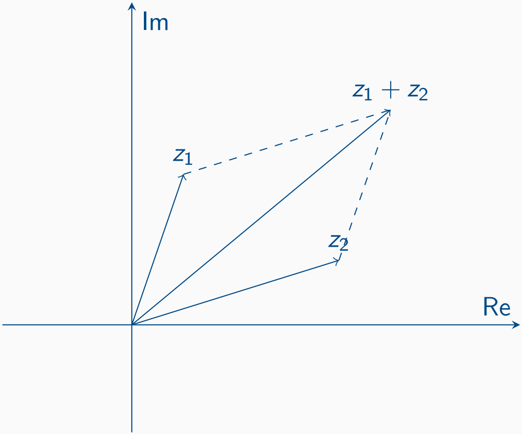
Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Então:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Propriedades:

- Comutatividade:
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$
- Associatividade:
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$$

Adição no diagrama de Argand



Módulo e argumento

Seja $z = x + iy$.

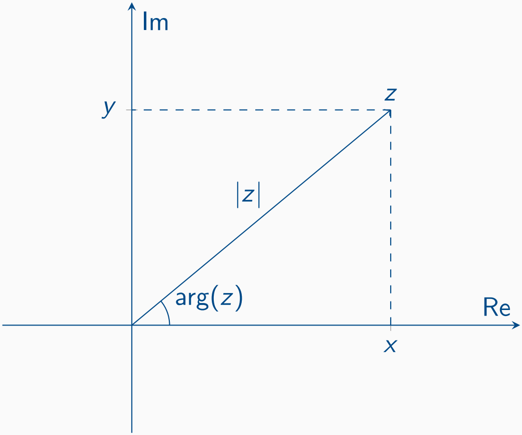
- Seu módulo é definido como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

- seu argumento é definido como

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Módulo e argumento no diagrama de Argand



Quadrantes

Ex.: Encontre o módulo e argumento de $z = 2 - 3i$.

$$|z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13};$$

$$\arg(z) = \arctan(-3/2) \sim \begin{cases} -0,982, \\ 2,158. \end{cases}$$

Como $x = 2$ e $y = -3$, z está no 4^o quadrante.

Multiplicação

Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Então:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Propriedades:

- Comutatividade:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

- Associatividade:

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3.$$

Multiplicação: módulo e argumento

- Módulo:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|;$$

- Argumento:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Conjugado complexo

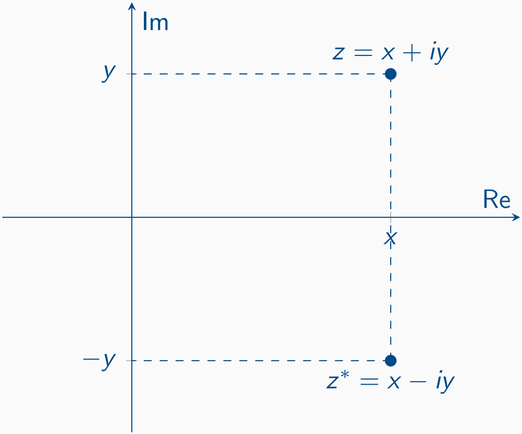
O conjugado complexo de $z = x + iy$ é

$$z^* = x - iy.$$

Ex.: Encontre o conjugado complexo de $z = (x + 5i)^{3y+2xi}$.

$$z^* = (x - 5i)^{3y-2xi}.$$

Conjugado complexo no diagrama de Argand



Propriedades do conjugado complexo

- $(z^*)^* = z$;
- $z + z^* = 2\,\mathrm{Re}(z)$;
- $z - z^* = 2\,\mathrm{Im}(z)$;
- $\dfrac{z}{z^*} = \dfrac{(x^2 - y^2) + i(2xy)}{(x^2 + y^2)}$.

Divisão

Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}, \\
&= \frac{z_1}{z_2}\frac{z_2^*}{z_2^*}, \\
&= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \\
&= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.
\end{aligned}$$

A forma polar

Exponencial complexa

Definição:

$$\exp(z) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Propriedade:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

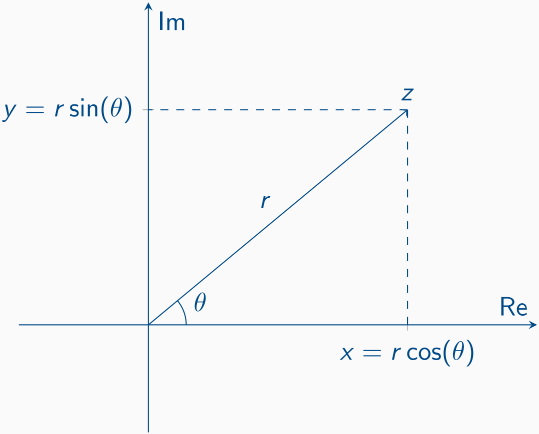
Equação de Euler

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots \\
&= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \\
&= \cos(\theta) + i\sin(\theta).
\end{aligned}
$$

Senos e cossenos

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$

Forma polar no diagrama de Argand



Forma polar

Definição:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) \\ &= re^{i\theta}, \end{aligned}$$

onde $r \geq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$.

Equivalência:

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2n\pi)},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Multiplicação e divisão

- Multiplicação:
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$
- Divisão:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Teorema de de Moivre

Teorema de de Moivre

Para todo $n \in \mathbb{C}$,

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Identidades trigonométricas

Ex.: Expresse $\sin(3\theta)$ e $\cos(3\theta)$ em potências de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^3 \\ &= \left[\cos^3(\theta) - 3\sin^2(\theta)\cos(\theta)\right] + \\ &\qquad\qquad i\left[3\sin(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^3(\theta)\right].\end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}\bullet\, \cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3\sin^2(\theta)\cos(\theta) \\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta); \\ \bullet\, \sin(3\theta) &= 3\sin(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^3(\theta) \\ &= -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta).\end{aligned}$$

Raízes da identidade

Ex.: Resolva a equação $z^n = 1$.

$$z^n = e^{ik2\pi}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$
$$\Rightarrow z_k = e^{ik2\pi/n}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, (n-1)\}.$$

Ex.: Encontre as raízes de $z^3 = 1$.

$$z_0 = 1; \quad z_1 = e^{i2\pi/3}; \quad z_2 = e^{i4\pi/3}.$$

Logaritmos e potências

Logaritmos

Definição:

$$\mathrm{Ln}(z) = w \mid z = e^{w}.$$

Propriedades:

- $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2)$;
- $\mathrm{Ln}(z) = \ln(r) + i(\theta + k2\pi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

O valor principal de $\mathrm{Ln}(z)$ é definido como

$$\ln(z) = \mathrm{Ln}(z), \quad \text{para } k = 0.$$

Exemplo 1

Ex.: Calcule $\mathrm{Ln}(-i)$.

$$
\begin{aligned}
-i &= \exp\left[i(k2\pi - \pi/2)\right]. \\
\Rightarrow \mathrm{Ln}(-i) &= i(k2\pi - \pi/2), \\
&= -i\frac{\pi}{2}, 3i\frac{\pi}{2}, \ldots \\
\Rightarrow \ln(-i) &= -i\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

Ex.: Simplifique a expressão $z = i^{-2i}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}(z) &= -2i\,\mathrm{Ln}(i). \\
\Rightarrow z &= \exp\left[-2i\,\mathrm{Ln}(i)\right]. \\
\mathrm{Ln}(i) &= \mathrm{Ln}(\exp\left[i(2n\pi + \pi/2)\right]), \\
&= i(2n\pi + \pi/2). \\
\Rightarrow z &= \exp(-2i[i(2n\pi + \pi/2)]), \\
&= \exp(4n\pi + \pi).
\end{aligned}$$

Aplicações a diferenciação e integração

Exemplo 1

Ex.: Derive $f(x) = e^{3x}\cos(4x)$.

Defina

$$\begin{aligned} z &= e^{3x}(\cos(4x) + i\sin(4x)) = e^{(3+4i)x}, \\ \Rightarrow f(x) &= \mathrm{Re}(z). \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= (3+4i)e^{(3+4i)x}, \\ \Rightarrow \frac{df(x)}{dx} &= e^{3x}(3\cos(4x) - 4\sin(4x)). \end{aligned}$$

Exemplo 2

Ex.: Calcule a integral $I = \int e^{ax}\cos(bx)dx$.

Defina

$$z = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) = e^{(a+ib)x}.$$

Então

$$\begin{aligned} I' = \int e^{(a+ib)x}dx &= \frac{e^{(a+ib)x}}{(a+ib)} + c, \\ &= \frac{e^{(a+ib)x}(a-ib)}{a^2+b^2} + c, \\ &= \frac{e^{ax}(ae^{ibx} - ibe^{ibx})}{a^2+b^2} + c. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\cos(bx) + b\sin(bx)\right] + \mathrm{Re}(c).$$

Funções hiperbólicas

Funções hiperbólicas

- $\sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$;
- $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$;
- $\tanh(z) = \dfrac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$;
- $\coth(z) = \dfrac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \dfrac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$;
- $\mathrm{sech}(z) = \dfrac{1}{\cosh(z)} = \dfrac{2}{e^z + e^{-z}}$;
- $\mathrm{cosech}(z) = \dfrac{1}{\sinh(z)} = \dfrac{2}{e^z - e^{-z}}$.