F 620/ MS650 - Métodos Matemáticos II
Primeiro semestre de 2020
Lista de Exercícios 1

1. Sejam z e w dois números complexos dados por $z = 3 + 4i$ e $w = 2 - i$. Faça, no diagrama de Argand, os seguintes gráficos:

   a) $z + w$,
   b) $w - z$,
   c) wz,
   d) z/w,
   e) $z^* w + w^* z$,
   f) w^2,
   g) $\ln(z)$,
   h) $(1 + z + w)^{1/2}$.

2. Calcule:

   a) $\mathrm{Re}(e^{2iz})$,
   b) $\mathrm{Im}(\cosh^2 z)$,
   c) $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$,
   d) $|\exp(i^{1/2})|$,
   e) $\exp(i^3)$,
   f) $\mathrm{Im}(2^{i+3})$,
   g) i^i,
   h) $\ln[(\sqrt{3} + i)^3]$.

3. Encontre as equações em termos de x e y dos conjuntos de pontos no diagrama de Argand qua satisfazem as seguintes relações:

   a) $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Im}(z^2)$,
   b) $\dfrac{\mathrm{Im}(z^2)}{z^2} = -i$,
   c) $\arg\left[\dfrac{z}{z-1}\right] = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Resolva a equação

$$z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = 0,$$

   a) avalie o efeito de definir z^3 igual a 2 e
   b) por fatoração, utilizando a expansão binomial de $(z + a)^4$.

   Faça o gráfico das sete raízes da equação no diagrama de Argand, exemplificando que as raízes complexas de uma equação polinomial sempre ocorrem em pares conjugados, se o polinômio possui coeficientes reais.

5. A expansão binomial de $(1+x)^n$ pode ser escrita, para um inteiro positivo n, como

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r,$$

onde ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

a) Use o teorema de de Moivre para mostrar que a soma

$$S_1(n) = {}^nC_0 - {}^nC_2 + {}^nC_4 - \cdots + (-1)^m\, {}^nC_{2m}, \qquad n-1 \leq 2m \leq n,$$

tem o valor $2^{n/2}\cos(n\pi/4)$.

b) Derive um resultado similar para a soma

$$S_2(n) = {}^nC_1 - {}^nC_3 + {}^nC_5 - \cdots + (-1)^m\, {}^nC_{2m+1}, \qquad n-1 \leq 2m+1 \leq n,$$

e verifique-o para os casos $n = 6, 7$ e 8.

6. Use o teorema de de Moivre com $n = 4$ para mostrar que

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1,$$

e deduzir que

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{1/2}.$$

7. Na teoria de relatividade especial, a relação entre as coordenadas de posição e tempo de um evento, como medidas em dois "frames"de referências que possuem eixos x paralelos, podem ser expressas em termos de funções hiperbólicas. Se as coordenadas são x e t em um "frame"e x' e t' no outro, então a relação tem a forma

$$\begin{aligned} x' &= x\cosh(\phi) - ct\sinh(\phi), \\ ct' &= -x\sinh(\phi) + ct\cosh(\phi). \end{aligned}$$

Expresse x e ct em termos de x', ct' e ϕ e mostre que

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2.$$