F 620/ MS650 - Métodos Matemáticos II
Primeiro semestre de 2020
Lista de Exercícios 2

1. Encontre a função analítica $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:
   a) se $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$,
   b) se $v(x, y) = e^{-y} \sin(x)$.

2. Encontre uma função analítica cuja parte imaginária é
$$(y \sin(y) + x \sin(x)) \exp(x).$$

3. A partir de $f(z) = 1/(x + iy)$, mostre que $1/z$ é analítica em todo o plano z finito, exceto no ponto $z = 0$.

4. Utilizando $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r,\theta)}$, onde $R(r, \theta)$ e $\Theta(r, \theta)$ são funções diferenciáveis reais de r e θ, mostre que as condições de Cauchy–Riemann em coordenadas polares são
$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta} = -R\frac{\partial \Theta}{\partial r}.$$
Dica: Calcule a primeira derivada com δz radial e então com δz tangencial.

5. Para cada uma das seguintes funções $f(z)$, encontre $f'(z)$ e a região máxima onde $f(z)$ é analítica.
   a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$,
   b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$,
   c) $f(z) = \dfrac{1}{z(z + 1)}$,
   d) $f(z) = e^{-1/z}$,
   e) $f(z) = z^2 - 3z + 2$,
   f) $f(z) = \tan(z)$,
   g) $f(z) = \tanh(z)$.

6. Encontre os raios de convergência das seguintes séries de Taylor:
   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(n)}$,
   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!z^n}{n^n}$,
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n n^{\ln(n)}$,
   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+p}{n}\right)^{n^2} z^n$, com p real.

7. Considere a função $f(z) = \text{Ln}(z^2 + 1)$.
   a) Mostre que $f(z)$ é simplesmente valorada se feitos os cortes de ramificação de $(0, -1)$ a $(-\infty, -1)$ e de $(0, 1)$ a $(0, \infty)$.
   b) Se $f(0) = -2\pi i$, encontre o valor de $f(i - 2)$.