Aula 2

Funções de uma variável complexa; relações de Cauchy-Riemann.

Rafael Rabelo

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Conteúdo

Funções de uma variável complexa

Definição

$f(z)$ é uma função de uma variável complexa z se, para todo valor de z em um certo domínio R (uma região no diagrama de Argand), existe um ou mais valores de $f(z)$.

Decomposição

Podemos decompor $f(z)$ em uma parte real e uma parte imaginária,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ex.:

$$e^z = e^x \cos(y + 2n\pi) + ie^x \sin(y + 2n\pi).$$

Funções simplesmente valoradas

Vamos considerar, por enquanto, funções que são *simplesmente valoradas*, *i. e.*, possuem um único valor para cada $z \in R$.

Funções diferenciáveis

Uma função $f(z)$ é diferenciável em um ponto $z \in R$ se

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right],$$

onde $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, existe e é única independente do sentido em que $\Delta z \to 0$ no diagrama de Argand.

Exemplo 1 (1)

Mostre que a função $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$ é diferenciável para qualquer valor de z.

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \frac{(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + 2i(x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 + 2i(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \frac{2x(\Delta x + i\Delta y) - 2y(\Delta y - i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= 2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y};
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 (2)

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = 2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y};$$

Se tomarmos primeiro $\Delta y = 0$ e depois $\Delta x \to 0$, ou $\Delta x = 0$ e depois $\Delta y \to 0$, o resultado será o mesmo:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = 2x + i2y = 2z.$$

Como z é arbitrário, $f(z)$ é diferenciável em todo o plano complexo $\mathbb{C}$.

Exemplo 1 (3)

Notando que $f(z) = (x^2 - y^2 + i2xy) = z^2$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right] \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{(\Delta z)^2 + 2z\Delta z}{\Delta z} \right] \\ &= 2z. \end{aligned}$$

Exemplo 2

Mostre que $f(z) = 2y + ix$ é não-diferenciável em todo o plano complexo.

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{2(y+\Delta y) + i(x+\Delta x) - 2y - ix}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{2\Delta y + i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}.\end{aligned}$$

Suponha que $\Delta z \to 0$ ao longo do caminho $\Delta y = m\Delta x$:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0}\left[\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right] &= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0}\left[\frac{(2m+i)\Delta x}{(1+im)\Delta x}\right] \\ &= \frac{2m+i}{1+im},\end{aligned}$$

que depende de m, e, portanto, da direção em que $\Delta z \to 0$. Assim, $f(z)$ é não-diferenciável em todo $\mathbb{C}$.

Funções analíticas

Uma função simplesmente valorada e diferenciável em todos os pontos de R é dita *analítica* (ou *holomorfa*, ou *regular*) em R.

Singularidades

Uma função pode ser analítica em um domínio exceto em um número finito de pontos (ou infinito, se o domínio é infinito). A função é dita analítica exceto nestes pontos, que são chamados de *singularidades de* $f(z)$.

Exemplo 3

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right] \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{1 - z - \Delta z} - \frac{1}{1-z} \right] \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{1}{(1 - z - \Delta z)(1-z)} \right] \\ &= \frac{1}{(1-z)^2}, \end{aligned}$$

que independe de como $\Delta z \to 0$. Portanto, $f(z)$ é diferenciável em todo $\mathbb{C}$, exceto em $z = 1$, que é uma singularidade.

Condições de Cauchy-Riemann

Analiticidade

Seja

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right].$$

Este limite deve ser único, independente da forma como $\Delta z \to 0$, para que $f(z)$ seja analítica.

Conexão (1)

Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, deve haver uma conexão entre $u(x, y)$ e $v(x, y)$ para que $f(z)$ seja analítica.

Escrevendo $f'(z)$ em termos de $u(x, y)$ e $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right] \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} \right. \\ &\qquad \left. \frac{-u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \right]. \end{aligned}$$

Conexão (2)

1. Considere $\Delta z = \Delta x$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y) + iv(x+\Delta x, y) - iv(x,y)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

2. Considere $\Delta z = \Delta y$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y) + iv(x, y+\Delta y) - iv(x,y)}{i\Delta y} \right] \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Condições de Cauchy-Riemann

Para que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica, é *necessário* que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

As condições de Cauchy-Riemann são também *suficientes* se as derivadas parciais de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ em relação a x e y são contínuas.

Exemplos anteriores

$f(z) = z^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad &= \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \quad \checkmark \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad &= \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y. \quad \checkmark \end{aligned}$$

$f(z) = 2y + ix$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad &= \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \checkmark \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \quad &\neq \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = -2. \quad \times \end{aligned}$$

Exemplo 1

Determine o domínio de $\mathbb{C}$ em que $f(z) = |x| - i|y|$ é analítica.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad = \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad \checkmark$$

- 1^o quadrante: $\frac{\partial u}{\partial x} = +1 \qquad \neq \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \qquad \times$
- 2^o quadrante: $\frac{\partial u}{\partial x} = -1 \qquad = \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \qquad \checkmark$
- 3^o quadrante: $\frac{\partial u}{\partial x} = -1 \qquad \neq \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = +1; \qquad \times$
- 4^o quadrante: $\frac{\partial u}{\partial x} = +1 \qquad = \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = +1. \qquad \checkmark$

$f(z)$ é analítica no 2^o e 4^o quadrantes.

Exemplo 2

Verifique se $f(z) = z^* = x - iy$ é analítica.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad &\neq \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \qquad \times \\
\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad &= \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Funções de z e z^*

Note que, como $x = (z + z^*)/2$ e $y = (z - z^*)/2i$, toda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ pode ser considerada como uma função de z e z^*.

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Se f é analítica, $\partial f/\partial z^* = 0$; então, f não pode ser função de z^*!

Relação com a equação de Laplace

Suponha $u(x,y)$ e $v(x,y)$ que satisfazem as relações de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Assim, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são soluções da Equação de Laplace em duas dimensões!

Ortogonalidade

Considere os gradientes de $u(x, y)$ e $v(x, y)$:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j};$$
$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{j}.$$

Supondo que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ satisfazem as condições de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned}\nabla u.\nabla v &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{-\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.\end{aligned}$$

Então, ∇u e ∇v são ortogonais!

Séries de potências

Séries de potências

Uma série de potências de uma função $f(z)$, centrada na origem, é dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

onde, em geral, a_n são complexos.

Na forma polar de z, a série pode ser escrita como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \exp(in\theta).$$

Convergência

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \exp(in\theta)$ é *absolutamente convergente* se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n,$$

for absolutamente convergente.

Raio de convergência

O *raio de convergência* de uma série é o valor R tal que a série é *absolutamente convergente* se $|z| < R$ e *divergente* se $|z| > R$. Se $|z| = R$, nenhuma conclusão geral pode ser obtida, e uma análise mais detalhada deve ser considerada.

O círculo de raio R é chamado *círculo de convergência* da série.

Testes de convergência

Teste da raiz:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Teste da razão:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Teorema

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ soma para uma função analítica de z dentro de seu círculo de convergência.

Corolário

Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, então, dentro de seu círculo de convergência,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$