Aula 3

Algumas funções elementares; funções multivaloradas e cortes de ramificação.

Rafael Rabelo

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Conteúdo

Funções elementares

A função exponencial

Definição:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Convergência: pelo teste da razão:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(r^n)^{1/n}}{(n!)^{1/n}} \\ &\sim \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} \to 0. \end{aligned}$$

Então, $f(z) = \exp(z)$ é analítica em todo $\mathbb{C}$, ou *integral*.

Algumas propriedades de $f(z) = \exp(z)$

- $\dfrac{d\exp(z)}{dz} = \exp(z)$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$;
- $a^z = \exp(z\ln(a)), \quad a \in \mathbb{R}$;
- $\exp(z) = \exp(z + i2k\pi)$.

Logaritmo

Definição:

$$\mathrm{Ln}(z) = w | z = \exp(w).$$

Forma polar:

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi).$$

Valor principal:

$$\ln(z) = \ln(r) + i\theta.$$

Potências complexas

Sejam t e z dois números complexos;

$$t^z = \exp(z\,\mathrm{Ln}(t)).$$

Corolário: n n-ésimas raízes de t

$$\begin{aligned} t^{1/n} &= \exp\left(\frac{1}{n}\,\mathrm{Ln}(t)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(r) + i\,\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right) \\ &= r^{1/n}\exp\left(i\,\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right); \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \end{aligned}$$

Funções multivaloradas e pontos de ramificação

Analiticidade e funções multivaloradas

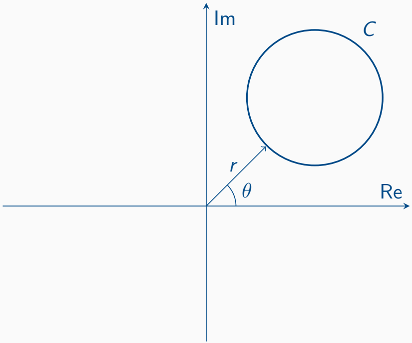
- Na definição de funções analíticas, assumimos que as funções são simplesmente valoradas;
- no entanto, funções importantes como logaritmos, potências e raízes n-ésimas são multivaloradas;
- com o devido cuidado, propriedades de funções analíticas podem ser aplicadas em funções multivaloradas;
- o devido cuidado é a identificação dos *pontos de ramificação* da função.

Pontos de ramificação

Um ponto de ramificação de uma função $f(z)$ é um ponto z_0 no diagrama de Argand tal que, se $f(z)$ é variada ao longo de uma curva fechada que envolve z_0, em geral o valor de $f(z)$ no ponto final será diferente de seu valor no ponto inicial.

Exemplo: $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$

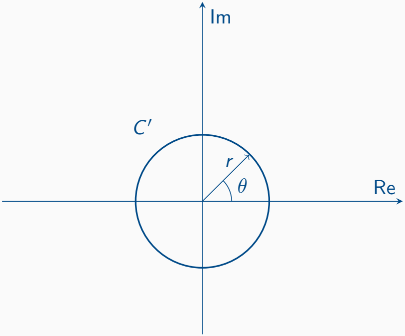
(i) Todo contorno fechado C que não inclui a origem faz com que θ volte ao seu valor original:



$$f(z) \xrightarrow{C} \sqrt{r}e^{i\theta/2} = f(z).$$

Exemplo: $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$

(ii) Todo contorno fechado C' que inclui a origem faz com que θ vá para $\theta + 2\pi$:



$$f(z) \xrightarrow{C'} \sqrt{r}e^{i(\theta+2\pi)/2} = -f(z).$$

Ponto de ramificação de $f(z) = \sqrt{z}$

O valor de $f(z) = \sqrt{z}$ muda em um circuito fechado que envolve $z = 0$. Então, $z = 0$ *é um ponto de ramificação de* $f(z)$.

Voltas

No exemplo $f(z) = z^{1/2}$, se fizermos duas voltas pelo caminho C', a função volta ao valor original.

O número de voltas necessárias para que a função volte ao seu valor original depende da função.

Algumas funções, como $\text{Ln}(z)$, que possui um ponto de ramificação na origem ($z = 0$), nunca volta ao seu valor original.

Cortes de ramificação

Um *corte de ramificação (ou de ramo)* é uma linha no plano complexo que age como uma barreira, de forma que, se o caminho C ao longo do qual a função $f(z)$ é avaliado não cruza o corte de ramo, a função permanece no *ramo principal* e é simplesmente valorada ao longo de C.

Os cortes de ramificação são usualmente colocados ao longo dos eixos real ou imaginário.

Exemplo

Encontre os pontos e cortes de ramificação da função $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$.

Sabemos que $\sqrt{z}$ tem ponto de ramificação em $z = 0$, portanto, vamos procurar os pontos onde o termo sob a raiz é nulo:

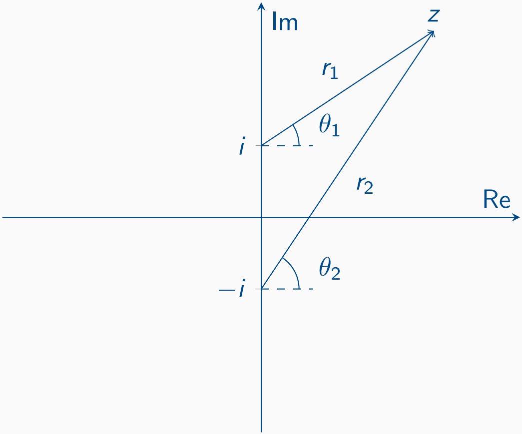
$$f(z) = \sqrt{(z^2 + 1)} = \sqrt{(z + i)(z - i)};$$

então, $z = \pm i$ são pontos de ramificação.

Para encontrar os cortes de ramificação, é conveniente fazer a mudança de parâmetros:

$$\begin{aligned} z - i &= r_1 e^{i\theta_1}; \\ z + i &= r_2 e^{i\theta_2}; \\ \Rightarrow \quad f(z) &= \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}. \end{aligned}$$

Coordenadas relativas de z



Exemplo

- O caminho C não engloba nem $z = i$ nem $z = -1$:

$$\theta_1 \to \theta_1 \quad \text{e} \quad \theta_2 \to \theta_2 \quad \Rightarrow \quad f(z) \to f(z);$$

- O caminho C engloba $z = i$, mas não $z = -1$:

$$\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi \quad \text{e} \quad \theta_2 \to \theta_2 \quad \Rightarrow \quad f(z) \to -f(z);$$

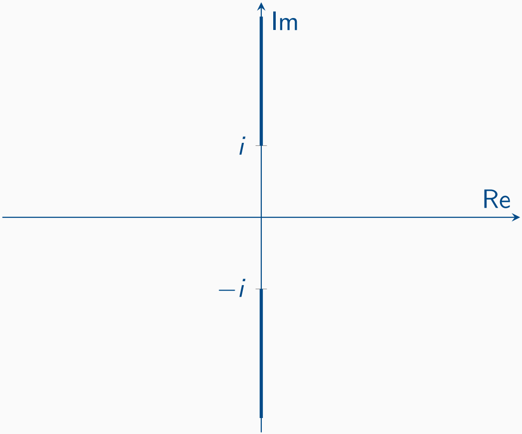
- O caminho C engloba $z = -i$, mas não $z = 1$:

$$\theta_1 \to \theta_1 \quad \text{e} \quad \theta_2 + 2\pi \to \theta_2 \quad \Rightarrow \quad f(z) \to -f(z);$$

- O caminho C engloba $z = -i$ e $z = 1$:

$$\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi \quad \text{e} \quad \theta_2 + 2\pi \to \theta_2 \quad \Rightarrow \quad f(z) \to f(z).$$

Corte de ramificação de $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$



Corte de ramificação de $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$