# Aula 4

## Singularidades e zeros de funções complexas; transformações conformes.

Rafael Rabelo

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"

# Singularidades e zeros de funções complexas

# Singularidades

Um ponto singular de $f(z)$ é qualquer ponto de $\mathbb{C}$ no qual $f(z)$ não é analítica.

Ex.: o ponto de ramificação é um tipo de ponto singular.

# Singularidades isoladas

Se $f(z)$ tem um ponto singular em $z = z_0$, mas é analítica em todos os pontos na vizinhança de $z_0$, este ponto é chamado de singularidade isolada.

# Pólos

Se $f(z)$ é da forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n},$$

onde $n$ é natural, $g(z)$ é analítica em todos os pontos na vizinhança de $z_0$ e $g(z_0) \neq 0$, então $f(z)$ possui um pólo de ordem $n$ em $z = z_0$.

# Pólos: definição alternativa

A função $f(z)$ tem um pólo de ordem $n$ em $z = z_n$ se

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = a$$

onde $n$ é natural e $a$ é um número complexo finito e diferente de zero.

- Se $a = 0$: o pólo é de ordem $< n$, ou $f(z)$ é analítica;
- se $a \to \infty$: o pólo é de ordem $> n$.

# Singularidade essencial

Se nenhum valor de $n$ pode ser encontrado tal que

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = a$$

seja satisfeita, então $z = z_0$ é chamado singularidade essencial.

# Exemplo

Encontre as singularidades da função

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}.$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}.$$

A função $f(z)$ tem pólos de ordem 1 em $z = \pm 1$.

# Singularidade removível

Uma singularidade é dita removível se $f(z)$ toma a forma $0/0$, mas $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe e independe da direção na qual aproxima-se de $z_0$.

# Exemplo

Mostre que a função $f(z) = \sin(z)/z$ tem uma singularidade removível em $z = 0$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin(z)}{z} \\ &= \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$, independente da direção em que $z \to 0$.

# Comportamento no infinito

O comportamento de $f(z)$ quando $z$ tende ao infinito é dado pelo comportamento de $f(1/\xi)$ em $\xi = 0$, onde $\xi = 1/z$.

# Exemplo

Determine o comportamento no infinito de $f(z) = z(1 + z^2)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\xi}\right) &= \frac{1}{\xi}\left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) \\ &= \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^3} \\ &= \frac{\xi^2 + 1}{\xi^3}. \end{aligned}$$

Portanto, $f(z)$ tem um pólo de ordem 3 em $z = \infty$.

# Exemplo

Determine o comportamento no infinito de $f(z) = \exp(z)$.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{\xi}\right) &= \exp\left(\frac{1}{\xi}\right) \\
&= \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!\xi^n}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $f(z)$ tem uma singularidade essencial em $z = \infty$.

# Zeros de funções complexas

Se $f(z)$ é da forma

$$f(z) = g(z)(z - z_0)^n,$$

onde $n$ é natural e $g(z_0) \neq 0$, então $f(z)$ possui um zero de ordem $n$ em $z = z_0$. Se $n = 1$, $z = z_0$ é um zero simples de $f(z)$.

Corolário: se $z = z_0$ é um zero de ordem $n$ de f(z), então $z = z_0$ é um pólo de ordem $n$ de $1/f(z)$.

# Transformações conformes

Uma transformação, ou mapa, é uma mudança de coordenadas de uma variável $z = x + iy$ para outra, $w = r + is$, através de uma fórmula

$$w = g(z) = r(x, y) + is(x, y).$$

O diagrama de Argand da variável $z$ é levado a uma região do diagrama de Argand da variável $w$, que pode corresponder a todo plano $\mathbb{C}$ ou apenas uma parte, cobertos uma ou mais vezes.

# Transformações conformes

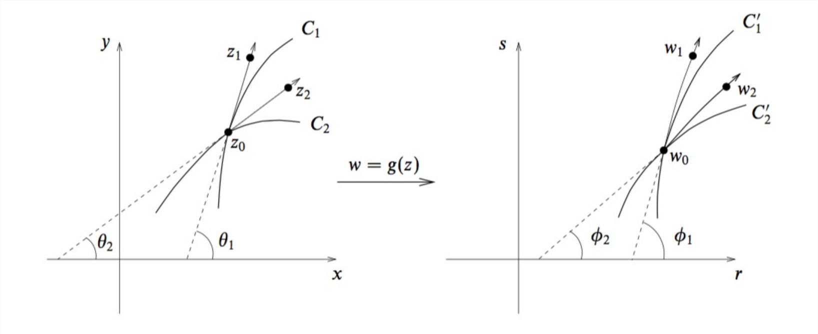
Uma transformação conforme é aquela na qual as variáveis $z$ e $w$ são relacionadas por funções $w = g(z)$ e $z = h(w)$, sua inversa, e ambas são analíticas, exceto, possivelmente, em alguns pontos isolados.

# Propriedades

Exceto em pontos onde $g'(z)$, e $h'(w)$, são zero ou infinito:

1. linhas contínuas no plano $z$ são transformadas em linhas contínuas no plano $w$;
2. o ângulo entre duas curvas que se intersectam no plano $z$ é igual ao ângulo entre as curvas correspondentes no plano $w$;
3. a 'amplificação', entre um plano e outro, de pequenos elementos de linha na vizinhança de um ponto é independente da direção do elemento;
4. qualquer função analítica de $z$ se transforma em uma função analítica de $w$, e *vice versa*.

# Diagramas



# Propriedades 2. e 3.

Os elementos de linha tangentes a $z_0$ no plano $z$ são:

$$z_1 - z_0 = \rho e^{i\theta_1} \quad e \quad z_2 - z_0 = \rho e^{i\theta_2};$$

e, transformados, no plano $w$, são

$$w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i(\phi_1 + \delta\phi_1)} \quad e \quad w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i(\phi_2 + \delta\phi_2)};$$

onde $\delta\phi_i \to 0$ quando $\rho_i \to 0$.

# Propriedades 2. e 3.

Como $g(z)$ é analítica, sua derivada deve ser independente da direção:

$$\lim_{z_1 \to z_0} \left( \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} \right) = \lim_{z_2 \to z_0} \left( \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} \right) = \left. \frac{dg}{dz} \right|_{z=z_0},$$

que pode ser escrito como

$$\lim_{\rho \to 0} \left( \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 + \delta\phi_1 - \theta_1)} \right) = \lim_{\rho \to 0} \left( \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 + \delta\phi_2 - \theta_2)} \right) = g'(z_0).$$

Esta expressão implica que, para $\rho$ pequeno, onde $\delta\phi_1 \approx \delta\phi_2 \to 0$:

$$\frac{\rho_1}{\rho} \approx \frac{\rho_2}{\rho} \approx |g'(z_0)|;$$

$$\phi_1 - \theta_1 \approx \phi_2 - \theta_2 \approx \arg(g'(z_0)).$$

Se há pontos onde $g' = 0$, então $\arg(g')$ é indefinido. Estes pontos são chamados pontos críticos da transformação.

# Propriedade 4.

Se $f(z) = \phi + i\psi$ e $z = h(w)$ são analíticas, então
$F(w) = f(h(w)) = \Phi + i\Psi$ é analítica.

Corolário: as partes real e imaginária tanto de $f(z)$ quanto de $F(w)$ satisfazem a equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = 0.$$

# Exemplo

Qual a imagem da transformação $w = e^{i\phi}(z - z_0)/(z - z_0^*)$, assumindo que $z$ e $z_0$ estão no semi-plano superior de $\mathbb{C}$?

$$w = e^{i\phi}\frac{z - z_0}{z - z_0^*} = \rho e^{i\psi},$$

onde

$$\rho = \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right|.$$

Como $z$ e $z_0$ estão no semi-plano superior, $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$, então $\rho \leq 1$. Como $\psi$ pode assumir qualquer valor, a imagem da transformação é o interior do círculo unitário.