F 620/ MS650 - Metódos Matemáticos II
Primeiro semestre de 2019
Lista de Exercícios 3

1. Obtenha a transformada de Fourier para a função delta de Dirac, $\delta(t)$.

2. Dada a função $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$,

   a) Encontre a transformada de Fourier da função $f(t)$.

   b) Aplicando o teorema da inversão de Fourier, mostre que

   $$\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|t|} = \int_0^\infty \frac{cos(\omega t)}{1+\omega^2} d\omega \,.$$

   c) Fazendo a substituição $\omega = \tan(\theta)$, demonstre a validade do teorema de Parseval para esta função.

3. Encontre a transformada de Fourier de

   $$H(x-a)\mathrm{e}^{-bx},$$

   em que $H(x)$ é a função de Heaviside.

4. Dada a função

   $$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   a) Encontre a transformada de Fourier de $f(t)$.

   b) Determine a convolução de $f(t)$ consigo mesma e, sem uma integração adicional, deduza sua transformada.

   c) Deduza que

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^2\omega}{\omega^2} d\omega = \pi, \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}^4\omega}{\omega^4} d\omega = \frac{2\pi}{3}.$$

5. Obtenha as expressões para as transformadas de Fourier em senos e cossenos da derivada primeira $f'(t)$, de uma função $f(t)$.

6. Mostre que

   $$\mathcal{F}_s[f''(t)] = \tilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega f(0) - \omega^2 F_s(\omega),$$

   em que $F_s(\omega)$ é a transformada de Fourier em senos de $f(t)$.

7. Mostre que, se a transformada finita de Fourier em cossenos de uma função $f(t)$, para $-T < t < T$, de período $2T$, é dada por

$$F_c(n) = \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

então,

$$f(t) = \frac{1}{T} F_c(0) + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right),$$

em que $f(t)$ é a transformada inversa de $F_c(n)$.

8. Considere a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) - k^2 x(t) = f(t),$$

em que k^2 é constante, com $0 \leq t < \infty$, satisfazendo as condições:

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0} = b \qquad \text{e} \qquad x(\infty) < \infty.$$

Use o método da transformada de Fourier em cossenos para mostrar que

$$x(t) = -\frac{b}{k} e^{-kt} - \frac{1}{2k} \int_0^{\infty} f(\xi) \left(e^{-k|t-\xi|} + e^{-k|t+\xi|}\right) d\xi.$$

9. A transformada de Fourier pode ser generalizada para mais de uma dimensão. Por exemplo, no espaço tridimensional, temos a seguinte transformada

$$\mathcal{F}[f(\vec{x})] \equiv \phi(\vec{k}) = \int d^3x f(\vec{x}) e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

em que $\cdot$ denota o produto escalar e a integral é tomada em todo o volume. Assim, temos a seguinte transformada inversa

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi(\vec{k})] \equiv f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}.$$

Como um exemplo específico, encontre a transformada de Fourier da função de onda para o estado $2p$ do elétron do átomo de hidrogênio

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^5}} z e^{-r/2a_0},$$

em que a_0 é o raio da primeira órbita de Bohr e z é uma coordenada cartesiana.

10. Uma partícula livre é descrita, na mecânica quântica, por uma *onda plana*

$$\psi_k(x,t) = \exp\left[\mathrm{i}\left(kx - \frac{\hbar}{2m}k^2 t\right)\right],$$

em que $\hbar$ e m são constantes positivas. Combinando ondas de momentos adjacentes com amplitudes $\varphi(k)$, podemos construir um *pacote de ondas*:

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) \exp\left[\mathrm{i}\left(kx - \frac{\hbar}{2m}k^2 t\right)\right] dk.$$

Sabendo que

$$\Psi(x,0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right),$$

em que a é uma constante, obtenha a expressão da função $\varphi(k)$.

11. Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $f(t) = e^{at}$;

b) $f(t) = t^n e^{at}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$

c) $f(t) = \cos(at)$;

d) $f(t) = \operatorname{sen}(at)$;

e) $f(t) = \cosh(at)$;

f) $f(t) = \operatorname{senh}(at)$.

12. Utilize as propriedades da transformada de Laplace para provar os seguintes itens, sem calcular qualquer integral de Laplace explicitamente:

a) $\mathcal{L}[t^{5/2}] = \dfrac{15}{8}\dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{7/2}}$;

b) $\mathcal{L}\left[\dfrac{\operatorname{senh}(at)}{t}\right] = \dfrac{1}{2}\ln\left[\dfrac{s+a}{s-a}\right], \qquad s > |a|;$

c) $\mathcal{L}[\operatorname{senh}(at)\cos(bt)] = \dfrac{a(s^2 - a^2 + b^2)}{[(s-a)^2 + b^2][(s+a)^2 + b^2]}$,

em que $\mathcal{L}[f(t)]$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

13. Mostre que

a) $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$,

b) $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$,

supondo $f(t)$ de ordem exponencial e contínua.

14. Utilizando a Transformada de Laplace, obtenha uma solução particular para a equação

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = t^2,$$

satisfazendo as condições

$$x(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad x'(0) = 0,$$

em que ω^2 é uma constante positiva.

15. Utilize a transformada de Laplace para resolver a seguinte equação

$$y(t) = 1 - \text{senh}(t) + \int_0^t (1+\tau)\, y(t-\tau) d\tau.$$

Dica: Lembre-se de ver qual a região em que a transformada existe e a convolução pode ser útil...

16. Use a inversão de Bromwich e contornos semelhantes, como apresentados na Figura 25.7(a) (Riley), para encontrar as funções das quais as seguintes são transformada de Laplace:

   a) $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{2}{s^2 + b^2}$;

   b) $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{n!}{(s-a)^{(n+1)}}, \qquad s > a$;

   c) $\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{a}{s^2 - a^2}, \qquad s > |a|$.

Compare suas respostas com as da tabela que contém as transformadas de Laplace.

17. Encontre a função $f(t)$ cuja transformada de Laplace é

$$\overline{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{\mathrm{e}^{-s} - 1 + s}{s^2}.$$

18. Sejam u_0 e k duas constantes positivas. Calcule

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma - \mathrm{i}\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\infty} e^{st} f(s) ds,$$

para

$$f(s) = \frac{u_0}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{k}}x\right).$$

19. Utilize a representação integral para a Função de Bessel de ordem zero

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \cos(\theta)) d\theta,$$

a fim de calcular a transformada de Laplace de $J_0(x)$, isto é, mostre que

$$\int_0^\infty e^{-sx} J_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

20. Considere uma corda semi-infinita, fixa no extremo $x = 0$, a qual está, inicialmente, em repouso. Seja uma força externa concentrada em f_0 atuando no ponto $x = vt$. Utilizando a transformada de Laplace para resolver esse problema, nos deparamos com a seguinte função

$$U(x,s) = \mathcal{L}[u(x,t)] = \begin{cases} f_0 \dfrac{v^2}{s^2} \dfrac{e^{-sx/v} - e^{-sx/c}}{c^2 - v^2}, & \text{para}\, v \neq c \\ \\ -f_0 x \dfrac{e^{-sx/c}}{2cs}, & \text{para}\, v = c \end{cases}$$

em que c é uma constante e s é o parâmetro da transformada.

Calcule a transformada inversa, isto é, calcule a seguinte integral

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C e^{st} U(x,s) ds,$$

em que o contorno C deixa todas as singularidades à esquerda da reta $\mathbf{Re}(s) = \gamma$, com γ real, a fim de mostrar que

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}[U(x,s)] = \begin{cases} \dfrac{v^2}{c^2} \left[\left(t - \dfrac{x}{v}\right) H\left(t - \dfrac{x}{v}\right) - \left(t - \dfrac{x}{c}\right) H\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \right], & v \neq c \\ \\ -\dfrac{x}{2c} H\left(t - \dfrac{x}{c}\right), & v = c, \end{cases}$$

em que $H(\alpha)$ é a função de Heaviside.