

Equação de Bethe-Salpeter em 2+1 dimensões para estado ligado de duas partículas

Vitor Gigante

Orientador: Prof. Tobias Frederico

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

4 de Fevereiro de 2014

Motivação: Grafeno

Grafeno

Elétrons em uma rede hexagonal bidimensional de átomos de carbono (K. Novoselov et al. Nature 438, 197 (2005), Science 206, 666 (2004))

Excitons no Grafeno

Estado ligado bidimensional férmion-antiférmion.

Notas de aula, Prof. Antônio H. Castro Neto. Escola de verão UFMG/2012. arXiv: 1004.3682v1(2010); N. M. R. Peres, PRL 105, 055501 (2010)

Equação de Bethe-Salpeter

- A equação de Bethe-Salpeter para o Modelo de Yukawa em 2+1

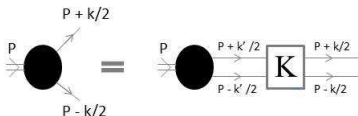


Figura: EBS para o estado ligado

$$\Gamma(p, k) = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} K(k, k') \frac{i}{\left(\frac{p}{2} - k'\right)^2 - m^2} \Gamma(p, k') \frac{i}{\left(\frac{p}{2} + k'\right)^2 - m^2}. \quad (1)$$

- Troca de um bóson escalar na aproximação escada

$$K(k, k') = \frac{(-ig)^2}{(k - k')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (2)$$

- Singularidades nos propagadores livres e no Kernel de interação.

E.E.Salpeter, H.A.Bethe, Phys.Rev. 84, 1232 (1951); W.Greiner, Quantum Electrodynamics-Fourth Edition, Ed.Springer (2009); Notas de aula, Prof. Tobias Frederico, Curso Diagramas de Feynman (FF-233)- ITA.

Remoção das singularidades

- Rotação de Wick

$$k_0 \rightarrow ik_0 \quad (3)$$

- Equação de Bethe-Salpeter (Modelo de Yukawa) em 2+1 no Euclidiano

$$\left[\left(\frac{M^2}{4} - \vec{k}_E^2 - k_0^2 - m^2 \right)^2 + M^2 k_0^2 \right] \Phi_E(\vec{k}_E, k_0) = \int \frac{d^2 k'_E dk'_0}{(2\pi)^3} K_E(k'_E, k_E) \Phi_E(\vec{k}'_E, k'_0) \quad (4)$$

- Kernel de Interação no Euclidiano

$$K_E(k, k') = \frac{g^2}{(k_E - k'_E)^2 + \mu^2} \quad (5)$$

- Projecção de ondas parciais para onda S

$$\begin{aligned} \Phi(k, k_0) &= \frac{2\pi}{\left(\frac{M^2}{4} - \vec{k}^2 - k_0^2 - m^2 \right)^2 + M^2 k_0^2} g^2 \quad (6) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_0}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk' k' \frac{\Phi(k', k'_0)}{\left[\left(k_0 - k'_0 \right)^2 + k'^2 + k^2 + \mu^2 \right]^2 - (2kk')^2}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

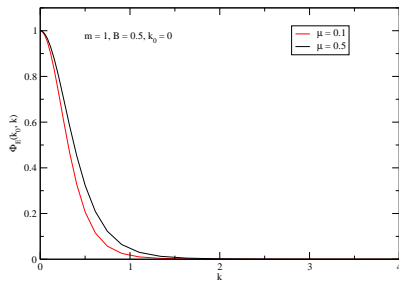
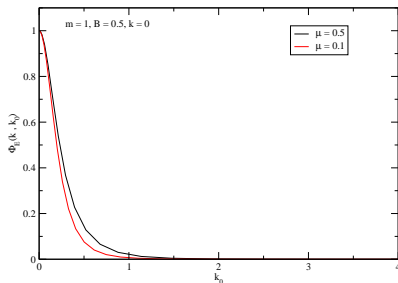
G.C.Wick, Phys.Rev. 96,1124 (1954); T.Nieuwenhuis et al, FBS 21, 167 (1996);

S.M.Dorkin, FBS 49, 233 (2009)

A amplitude de Bethe-Salpeter no Euclidiano

Rotação de Wick

- Método numérico - Quadratura de Gauss-Legendre



Representação Integral de Nakanishi

Representação Integral da Teoria de Perturbação (RITP)

- Representação paramétrica de qualquer diagrama para bósons interagentes, onde o denominador carrega toda informação sobre o comportamento no espaço de Minkowski

Por que Representação de Nakanishi?

- A rotação de Wick não remove as singularidades presentes na integração para o cálculo de fatores de forma;
- Buscar uma solução mais simples no espaço de Minkowski;

A representação de Nakanishi para a amplitude de Bethe-Salpeter

$$\Phi(k, p) = -i \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g^{(n)}(\gamma', z')}{[\gamma' + m^2 - \frac{1}{4}M^2 - k^2 - p \cdot k z' - i\epsilon]^{n+2}} \quad (7)$$

Unicidade

- Dado n , temos uma única função $g^{(n)}$

N.Kakanishi, Phys.Rev 130, 1230 (1963); K.Kusaka, A.G.williams, Phys.Rev.D 51, 7026 (1995)

Amplitude de BS no Euclidiano e a RITP

- A representação no Euclidiano é dada tomando $k_0 \rightarrow ik_0$ em (3), no referencial de repouso, temos:

$$\Phi(k_E, p) = -i \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_B^{(n)}(\gamma', z'; \kappa^2)}{\left(\gamma' + m^2 - \frac{M^2}{4} + k_E^2 - iM k_E^0 z'\right)^{n+2}}, \quad (8)$$

onde $k_E^2 = (k_E^0)^2 + (\vec{k})^2$.

- Dada a propriedade $g_B^{(n)}(\gamma, z; \kappa^2) = g_B^{(n)}(\gamma, -z; \kappa^2)$ temos:

$$\begin{aligned} \Phi(k_E, p) &= -i \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' g_B^{(n)}(\gamma', z'; \kappa^2) \\ &\times \Re \left[\frac{1}{\left(\gamma' + m^2 - \frac{M^2}{4} + k_E^2 - iM k_E^0 z'\right)^{n+2}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Fronte de Luz

Brodsky et al, Physics Report 301 (1998)

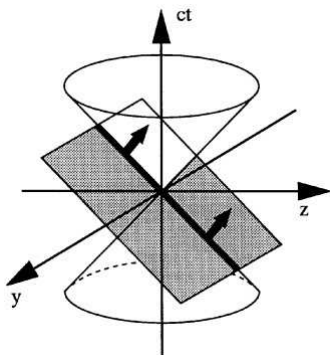


Figura: Front-form

Dirac, Rev. Mod. Phys. (1951) Ponto em 3D: (x_0, x_1, x_3) , onde $x_0 = t$. Espaço e tempo:

$$\begin{cases} x^+ &= x^0 + x^3 \\ x^- &= x^0 - x^3 \\ \vec{x}_\perp &= x^1 \end{cases}$$

Momentos:

$$\begin{cases} k^+ &= k^0 + k^3 \\ k^- &= k^0 - k^3 \\ \vec{k}_\perp &= k^1 \end{cases}$$

Relação de dispersão:

$$\begin{cases} k^- &= \frac{(\vec{k}_\perp)^2 + m^2}{k^+} \end{cases}$$

RITP e a projeção na frente de luz

Função de onda de valência na RITP

$$\begin{aligned}
 \phi_v^{(n)}(\gamma, z) &= i \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' g_B^{(n)}(\gamma', z', \kappa^2) \int_{-\infty}^\infty \frac{dk^-}{2\pi} \\
 &\times \frac{1}{(\gamma' + \kappa^2 - k^2 - p \cdot kz' - i\epsilon)^{n+2}} \\
 &= c \int_0^\infty d\gamma' \frac{g_B^{(n)}(\gamma', z, \kappa^2)}{[\gamma' + \gamma + z^2 m^2 + (1 - z^2) \kappa^2]^{n+1}}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

onde $c = \frac{2}{M(n+1)}$.

onde introduzimos $\gamma = k_\perp^2$, $z = \frac{-2k^+}{M}$ e $\kappa^2 = m^2 - \frac{p^2}{4} > 0$, para o estado ligado. J. H. O. Sales et al. PRC 61, 044003 (2000); Karmanov and Carbonell, Eur. Phys. J. A 27, 1 (2006); J. Carbonell, V.A. Karmanov, Eur. Phys. J. A 46, 387 (2010)

RITP e a projeção na frente de luz

A função $B^{(n)}(\gamma, z)$

$$\begin{aligned}
 B^{(n)}(\gamma, z) &= (-1)^n (ig)^2 \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' g_B^{(n)}(\gamma', z', \kappa^2) \\
 &\times \int_{-\infty}^\infty \frac{dk^-}{2\pi} \frac{1}{\left(k + \frac{p}{2}\right)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{\left(k - \frac{p}{2}\right)^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \\
 &\times \frac{1}{\left(k - k'\right)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{\left(k'^2 + p \cdot k' z' - \gamma' - \kappa^2 + i\epsilon\right)^{n+2}}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

EBS projetada na FL na representação de Nakanishi

$$\phi_v^{(n)}(\gamma, z) = B^{(n)}(\gamma, z) \quad (12)$$

T.Frederico, G.Salme, M.Viviani, Phys.Rev.D 85, 036009 (2012); T.Frederico, G.Salme, M.Viviani, Phys.Rev.D 89, 016010 (2014)

Organizando $\phi_v^{(n)}(\gamma, z) = B^{(n)}(\gamma, z)$ $n = 1$

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{g_B(\gamma', z, \kappa^2)}{[\gamma' + \gamma + z^2 m^2 + (1 - z^2) \kappa^2]^2} = \int_{-1}^1 dz' \int_0^\infty d\gamma' V(z, z', \gamma, \gamma') g_B(\gamma', z, \kappa^2). \quad (13)$$

onde

$$V(z, z', \gamma, \gamma') = g^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi} \frac{P(p, z', k, \gamma', \kappa^2)}{\left[\left(k + \frac{p}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right] \left[\left(k - \frac{p}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right]} \quad (14)$$

e

$$P(p, z', k, \gamma', \kappa^2) = \int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k - k'')^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k''^2 + p \cdot k'' z' - \gamma' - \kappa^2 + i\epsilon)^3}. \quad (15)$$

O que usamos!

$$\int \frac{d^d q}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)^n} = i(-1)^{\frac{d}{2}} \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(-m^2 + i\epsilon)^{n - \frac{d}{2}}}. \quad (16)$$

O Kernel em 2+1 dimensões

$$V(\gamma, z; \gamma', z') = \begin{cases} W(\gamma, z; \gamma', z'), & \text{se } -1 \leq z \leq z' \leq 1, \\ W(\gamma, -z; \gamma', -z'), & \text{se } -1 \leq z' \leq z \leq 1, \end{cases}$$

onde

$$W(\gamma, z; \gamma', z') = \frac{2(8a^2b + 4a(3b^2 + 3bc + 2c^2) + b^2(3b + 2c))}{3(a + b + c)^{3/2}(b^2 - 4ac)^2} - \frac{16\sqrt{ab}}{3(b^2 - 4ac)^2}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1+z}{1+z'}\mu^2, \\ b &= \gamma + z^2m^2 + (1-z^2)\kappa^2 + \frac{1+z}{1+z'}\gamma' - \frac{1+z}{1+z'}\mu^2, \\ c &= \frac{1+z}{1+z'}\left(\frac{z'^2M^2}{4}\right) - \gamma - z^2m^2 - (1-z^2)\kappa^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Método Numérico

Expandimos a função peso de Nakanishi como

$$g_b^{(Ld)}(\gamma, z; \kappa^2) = \sum_{l=0}^{N_z} \sum_{j=0}^{N_g} A_{lj} G_l(z) \mathcal{L}_j(\gamma) \quad (19)$$

onde as funções $G_l(z)$ são dadas em termos dos polinômios de Gegenbauer, $C_{2l}^{(5/2)}(z)$, por

$$G_l(z) = 4(1-z^2)\Gamma(5/2) \sqrt{\frac{(2l+5/2)(2l)!}{\pi\Gamma(2l+5)}} C_{2l}^{(5/2)}(z) \quad (20)$$

e as funções $\mathcal{L}_j(\gamma)$ são expressas em termos dos polinômios de Laguerre, $L_j(a\gamma)$, by

$$\mathcal{L}_j(\gamma) = \sqrt{a} L_j(a\gamma) e^{-a\gamma/2}. \quad (21)$$

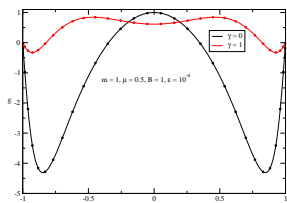
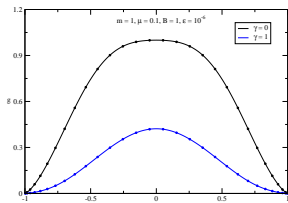
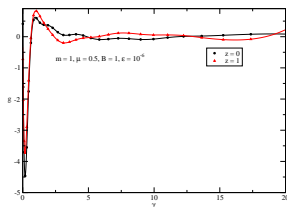
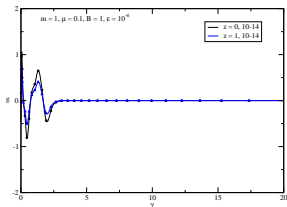
As seguinte condições de ortogonalidade são satisfeitas

$$\int_{-1}^1 dz G_l(z) G_n(z) = \delta_{ln}, \quad (22)$$

$$\int_0^\infty d\gamma \mathcal{L}_j(\gamma) \mathcal{L}_\ell(\gamma) = a \int_0^\infty d\gamma e^{-a\gamma} L_j(a\gamma) L_\ell(a\gamma) = \delta_{jl}$$

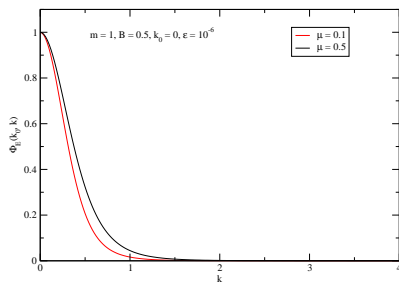
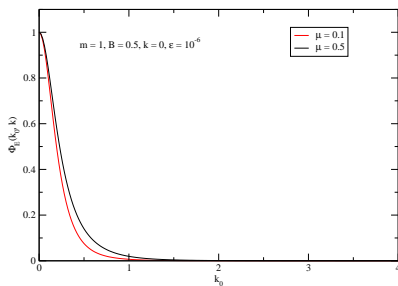
Finalmente, a integração sobre a variável z é realizada usando quadratura de Gauss-Legendre, enquanto a quadratura de Gauss-Laguerre foi adotada para variável *gamma*.

Autovetores-Função peso de Nakanishi

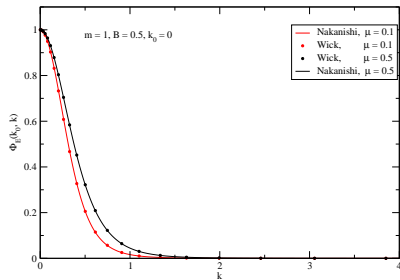
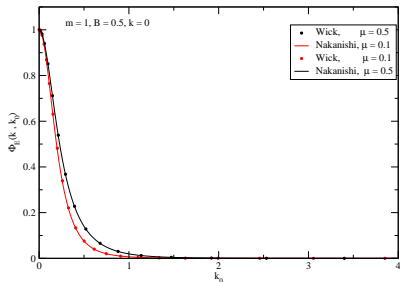


A amplitude de Bethe-Salpeter no Euclidiano RITP

- Utilizando as funções de Nakanishi calculadas acima, construímos a amplitude de BS dada pela equação 9.



Comparação entre o métodos



Os autovalores

| B/m | $\mu = 0.1$ | Eucl. | $\mu = 0.5$ | Eucl. |
|-------|-------------|----------------------------|-------------|-------|
| 0.01 | 0.882 | 0.79 | 5.359 | 5.31 |
| 0.1 | 4.270 | 4.268; 4.268 [†] | 14.88 | 14.87 |
| 0.2 | 8.067 | 8.06 | 22.67 | 22.67 |
| 0.5 | 19.51 | 19.51 | 42.33 | 42.33 |
| 1 | 36.03 | 36,04; 36.052 [†] | 67.38 | 67.39 |

Tabela: Valores de g^2/m^4 calculados com Eq. (13) para diferentes energias de ligação B e massas do bóson trocado μ . Comparação com cálculos no espaço-Euclidiano obtidos de T. Nieuwenhuis, J. A. Tjon, FBS 21, 167 (1996)([†]).

Preparando para aplicar a unicidade da função de Nakanishi

- **Integração (3+1-dim) na Frente de Luz (n=1)** (Karmanov and Carbonell, Eur. Phys. J. A 27, 1 (2006); J. Carbonell, V.A. Karmanov, Eur. Phys. J. A 46, 387 (2010))
- Trabalhamos a função $B(\gamma, z)$ para construirmos uma expressão que contenha um denominador do tipo

$$\frac{1}{[\gamma' + \gamma + z^2 m^2 + (1 - z^2) \kappa^2]^{n+1}}. \quad (23)$$

Integração (2+1-dim) na Frente de Luz (n=1)

$$\int_0^\infty d\gamma' \frac{g_B^{(1)}(\gamma', z, \kappa^2)}{[\gamma' + \gamma + z^2 m^2 + (1 - z^2) \kappa^2]^2} = -\frac{g^2}{6\pi^{\frac{5}{2}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \int_0^\infty d\gamma''$$

$$\int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^1 dz' \frac{g_B^{(1)}(\gamma', z', \kappa^2)}{[\gamma'' + \gamma + z^2 m^2 + (1 - z^2) \kappa^2]^2} \times$$

$$[\theta(z' - z) \Lambda(z, z', \gamma', \gamma'') + \theta(z - z') \Lambda(-z, -z', \gamma', \gamma'')]. \quad (24)$$

Unicidade da função de Nakanishi

Utilizando a unicidade da função $g_B^{(1)}$

$$g_B^{(1)}(\gamma, z, \kappa^2) = -\frac{g^2}{6\pi^{\frac{5}{2}}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \int_0^\infty d\gamma' \int_{-1}^1 dz' g_B^{(1)}(\gamma', z', \kappa^2) \times [\theta(z' - z) \Lambda(z, z', \gamma', \gamma) + \theta(z - z') \Lambda(-z, -z', \gamma', \gamma)], \quad (25)$$

$\Lambda(z, z', \gamma, \gamma')$

$$\Lambda(z, z', \gamma, \gamma') = \left(\frac{1+z}{1+z'}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{d^2}{d\lambda^2} \int_0^1 dv \frac{v^2}{[v(1-v)]^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty d\omega \times \int_0^1 d\eta \eta^2 \delta[\lambda + \gamma' - \eta\omega^2 - \eta\Gamma(v, z, z', \gamma)], \quad (26)$$

$$\Gamma(v, z, z', \gamma') = \frac{1+z}{1+z'} \left[\frac{v}{1-v} \left(z'^2 \frac{M^2}{4} + \kappa^2 + \gamma' \right) + \frac{\mu^2}{v} + \gamma' \right]. \quad (27)$$

- Nosso próximo desafio é integrar a função $\Lambda(z, z', \gamma, \gamma')$
- É possível fazer esta integração analiticamente no modelo de Wick-Cutkosky ($\mu = 0$)

A Equação integral para a função de Nakanishi em 3+1

O que temos em 3+1 para o modelo de Wick-Cutkosky

$$g_B^{WC}(\gamma, z) = \frac{g^2}{2(4\pi)^2} \theta(\gamma) \int_0^\infty \frac{d\gamma'}{\gamma'} \int_{-1}^1 dz' \frac{g_B^{WC}(\gamma', z')}{[z'^2 \frac{M^2}{4} + \kappa^2 + \gamma']} \times$$

$$\left[\theta(z' - z) \theta\left(\gamma' - \frac{(1+z')}{(1+z)} \gamma\right) + \theta(z - z') \theta\left(\gamma' - \frac{(1+z')}{(1+z)} \gamma\right) \right] \quad (28)$$

Podemos fatorar $g_B^{WC}(\gamma, z) = f_B^{WC}(z) \delta(\gamma)$

$$g_B^{WC}(\gamma, z) = \frac{g^2}{2(4\pi)^2} \delta(\gamma) \int_{-1}^1 dz' \frac{f_B^{WC}(z')}{[z'^2 \frac{M^2}{4} + \kappa^2]} \quad (29)$$

$$\times \left[\theta(z' - z) \frac{(1+z')}{(1+z)} + \theta(z - z') \frac{(1-z')}{(1-z)} \right]$$

EBS férmion-antiférmion

- A base

$$B = \{I, \gamma^i\} \quad i = 0, 1, 2 \quad (30)$$

onde

$$\gamma^0 = \sigma^3; \quad \gamma^1 = i\sigma^1; \quad \gamma^2 = i\sigma^3 \quad (31)$$

- O propagador do férmion é

$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \quad (32)$$

- A amplitude de Bethe-Salpeter é dada por

$$\begin{aligned} \Phi_{ab}(k, p) &= (ig)^2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{m + \frac{1}{2}\not{p} + \not{k}}{(\frac{p}{2} + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{\Phi_{ab}(k', p)}{(k' - k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\ &\times \frac{m - \frac{1}{2}\not{p} + \not{k}}{(\frac{p}{2} - k)^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (33)$$

- Decomposição da amplitude de BS

$$\begin{aligned} \Phi_{ab} &= 1\phi^s + \phi_i^v \gamma^i \\ &= \left(\phi_1 \frac{p_i}{M} + \phi_2 \frac{k_i}{M} + \phi_3 \epsilon_{jki} \frac{p^j k^k}{M^2} \right) \gamma^i \end{aligned} \quad (34)$$

EBS férmion-antiférmion

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 são funções escalares de $p^2, k^2, k \cdot p$. Impondo a condição de ortogonalidade

$$(ap^i - k^i) \cdot p^i = 0, \quad (35)$$

Reescremos

$$\begin{aligned} \Phi_{ab} &= 1\phi_4 + \frac{\phi_1}{M}p_i\gamma^i + \frac{\phi_2}{M}(p_i\frac{k \cdot p}{M^2} - k_i)\gamma^i + \frac{\phi_3}{M^2}\epsilon_{jki}p^j k^k \gamma^i \\ &= S_1\phi_1 + S_2\phi_2 + S_3\phi_3 + S_4\phi_4, \end{aligned} \quad (36)$$

onde

$$\begin{aligned} S_4 &= 1; & S_2 &= \frac{k \cdot p}{M^3}\not{p} - \frac{\not{k}}{M} \\ S_1 &= \frac{\not{p}}{M}; & S_3 &= \frac{\epsilon_{ijk}}{M^2}p^i k^j \gamma^k. \end{aligned} \quad (37)$$

EBS férmion-antiférmion

Desta forma temos 4 equações acopladas da forma

EBS férmion-antiférmion

$$\phi_a(k, p) = (ig)^2 \frac{i}{\left(\frac{p}{2} + k\right)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{\left(\frac{p}{2} - k\right)^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k' - k)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \sum_{a=1}^4 c_{ij}(k, k', p) \phi_a(k', p), \quad (38)$$

onde

$$c_{ij} = \frac{1}{N_j} \text{Tr} \left[S_i \left(\not{p}/2 + \not{k} + m \right) S'_j \left(\not{p}/2 - \not{k} - m \right) \right]. \quad (39)$$

e

$$N_i = \text{Tr}[S_i] \quad (40)$$

Conclusão e Perspectivas futuras

Conclusão

- **Verificamos que o método da projeção na frente de luz utilizando a representação de Nakanishi, aplica-se para construção da amplitude de Bethe-Salpeter no espaço de Minkowski em $2+1$.**

Perspectivas futuras

- **Estudar o problema da conjectura da unicidade em $2+1$ dimensões**
- **Desenvolver o formalismo para o modelo de estados ligados de fermions e estudar possíveis soluções numéricas;**