

Método de Ritus

Omar Roldán
Eduardo Fraga
Takeshi Kodama

Fevereiro 7, 2014

RETINHA

Sumário

Motivação

Aplicação

Conceitos Básicos de TQC no vácuo

Caso com campo magnético de externo

O propagador

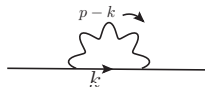
Método de Ritus

Diagonalizando G

Caso: campo magnético constante

Conclusões

- ▶ Cálculo das correções radiativas quando temos um campo magnético de fundo (tipo no LHC ou em estrelas compactas).



- ▶ Obter as contribuições do campo magnético ao fator giromagnético.

TQC no vácuo

A Lagrangiana livre dos campos fermiônicos e bosônicos é

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Os propagadores desta teoria são:

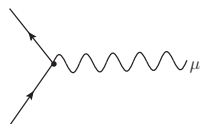
$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{p} \end{array} = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m_0 + i\epsilon}, \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \text{~~~~~} \\ \nu \end{array} \xrightarrow{q} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}, \quad (3)$$

Quando se introduz a interação na Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{int} = -e_0 (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) A^\mu, \quad (4)$$

um novo diagrama surge



The diagram shows a central vertex where two fermion lines (solid lines with arrows) meet. One line enters from the bottom-left, and another enters from the top-left. A single photon line (wavy line) exits to the right. The index μ is written at the end of the photon line.

$$= -ie\gamma^\mu, \quad (5)$$

o qual por sua vez produz modificações nos propagadores livres dos férmions e fótons.

Assim, por exemplo, o propagador fermiônico se modifica por

$$\text{---} \bullet \text{---} = \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \circlearrowleft \text{---} + \dots \quad (6)$$

onde introduzimos o diagrama irreduzível de um férmion (one-particle-irreducible $1PI$) através da relação

$$-i\Sigma(p) =$$

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \dots \quad (7)$$

que representa o somatório sobre todos os diagramas que não podem ser cortados em duas partes.

Logo,

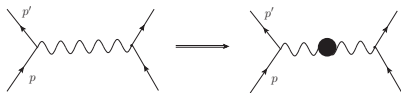
$$\begin{aligned}
 \longrightarrow \bullet \longrightarrow &= \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} (-i\Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m_0} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \left[1 + \frac{\Sigma}{\not{p} - m_0} + \left(\frac{\Sigma}{\not{p} - m_0} \right)^2 + \dots \right] \\
 &= \frac{i}{\not{p} - (m_0 + \Sigma)}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

deste modo, vemos que a massa do elétron é modificada pela presença do campo EM¹. A massa efetiva é


$$m = m_0 + \Sigma. \tag{9}$$

¹Identificamos a massa da partícula como o polo do seu propagador

Do mesmo modo, o propagador fotônico é também modificado.
O qual deve ser tido em conta em diagramas como:



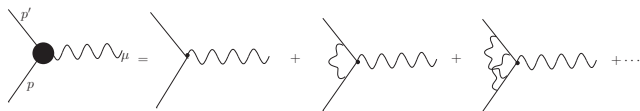
Finalmente, o próprio vértice de interação



$$= -ie\gamma^\mu, \quad (10)$$

é modificado pelos efeitos quânticos

$$-ie\Gamma^\mu(p', p) = \quad (11)$$



Assim, a própria interação é modificada pelas correções radiativas.

Um exemplo disto é dado pelas correções ao momento giromagnético do férmion.

Que é obtido ao considerar o limite $p \rightarrow p'$ em $\Gamma^\mu(p', p)$ e supondo um acoplamento com um campo magnético externo.

Campo externo

Temos um férmion que interage de acordo com a Lagrangiana da QED

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e_0 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu, \quad (12)$$

e além disso, queremos introduzir o sistema num campo EM externo (fixo e clássico), em particular um campo magnético. Isto é feito, ao modificar o termo de interação

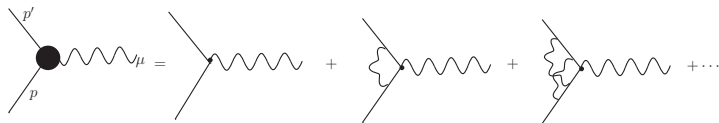
$$\mathcal{L}_{int}^1 = -e_0 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu, \quad (13)$$

por

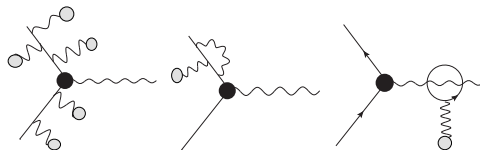
$$\mathcal{L}_{int}^2 = -e_0 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu - e_0 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu^{ext}. \quad (14)$$

Assim, além das modificações aos propagadores devido às correções radiativas, temos também as correções devidas ao campo externo.

Por exemplo, o vértice



é corregido com diagramas do tipo:



Segunda Opção

Considerar a lagrangiana inicial

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi - e_0 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu^{\text{ext}}, \quad (20)$$

e só depois, introduzir o termo extra

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e_0 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu. \quad (21)$$

Nesta visão, temos


$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(\gamma^\mu \Pi_\mu - m_0)\psi,$$

$$\Pi_\mu = i\partial_\mu - e_0 A_\mu^{ext},$$

Assim, o propagador associado ao sistema de background, é dado pelo operador inverso

$$\longrightarrow \longrightarrow = (\gamma^\mu \Pi_\mu - m_0)^{-1}, \quad (22)$$

e deste modo, o vértice



$$= -ie\gamma^\mu. \quad (23)$$

produz as correções radiativas usuais, por exemplo,



$$= \text{tree-level vertex} + \text{one-loop correction} + \text{two-loop correction} + \dots \quad (24)$$

No vácuo

O propagador $G_0(x, x')$ para férmions no vácuo satisfaz

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_x G_0(x, x') = \delta(x - x'). \quad (25)$$

Notando que

$$\langle x | (\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m) = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_x \langle x | \quad (26)$$

e

$$G_0(x, x') \equiv \langle x | \hat{G}_0 | x' \rangle, \quad \langle x | x' \rangle = \delta(x - x'). \quad (27)$$

Temos

$$\langle x | (\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m) \hat{G}_0 | x' \rangle = \langle x | x' \rangle, \quad (28)$$

isto é,

$$G_0 = (\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m)^{-1} = \frac{1}{\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m}. \quad (29)$$

Note que, no espaço dos momenta esse operador é diagonal

$$\langle p | G_0 | p' \rangle = G_0(p) \delta(p - p'), \quad G_0(p) = \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m}. \quad (30)$$

Temos

$$\langle x | (\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m) \hat{G}_0 | x' \rangle = \langle x | x' \rangle, \quad (28)$$

isto é,

$$G_0 = (\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m)^{-1} = \frac{1}{\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m}. \quad (29)$$

Note que, no espaço dos momenta esse operador é diagonal

$$\langle p | G_0 | p' \rangle = G_0(p) \delta(p - p'), \quad G_0(p) = \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m}. \quad (30)$$

Com campo externo

Na presença dum campo externo o propagador $G(x, x')$ satisfaz

$$\left(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m\right)_x G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (31)$$

ou

$$G = \left(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m\right)^{-1}, \quad (32)$$

onde

$$\hat{\Pi}_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu. \quad (33)$$

Procuramos por uma representação (uma base) tal que a função de green (o propagador) seja diagonal.

$$\langle \alpha | \mathbf{G} | \alpha' \rangle = \mathbf{G}(\alpha) \delta(\alpha - \alpha'). \quad (34)$$

Usando a relação de completeza

$$\int_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \mathbf{1}, \quad (35)$$

podemos obter o propagador no espaço das coordenadas

$$\begin{aligned}
 \langle x | G | x' \rangle &= \int_{\alpha} \int_{\alpha'} \langle x | \alpha \rangle \langle \alpha | G | \alpha' \rangle \langle \alpha' | x' \rangle \\
 &= \int_{\alpha} \alpha(x) G(\alpha) \alpha^{\dagger}(x'),
 \end{aligned} \tag{36}$$

onde

$$\alpha(x) \equiv \langle x | \alpha \rangle, \quad \langle \alpha | x \rangle = [\langle x | \alpha \rangle]^{\dagger}, \tag{37}$$

No caso particular de uma partícula livre, temos $|\alpha\rangle = |p\rangle$,

$$\alpha(x) \rightarrow \langle x | p \rangle = \frac{e^{-ip \cdot x}}{(2\pi)^2} \mathbb{1} \tag{38}$$

$$G(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - x')} \frac{1}{\gamma^{\mu} p_{\mu} - m}. \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 \langle x | G | x' \rangle &= \int_{\alpha} \int_{\alpha'} \langle x | \alpha \rangle \langle \alpha | G | \alpha' \rangle \langle \alpha' | x' \rangle \\
 &= \int_{\alpha} \alpha(x) G(\alpha) \alpha^{\dagger}(x'),
 \end{aligned} \tag{36}$$

onde

$$\alpha(x) \equiv \langle x | \alpha \rangle, \quad \langle \alpha | x \rangle = [\langle x | \alpha \rangle]^{\dagger}, \tag{37}$$

No caso particular de uma partícula livre, temos $|\alpha\rangle = |p\rangle$,

$$\alpha(x) \rightarrow \langle x | p \rangle = \frac{e^{-ip \cdot x}}{(2\pi)^2} \mathbb{1} \tag{38}$$

$$G(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - x')} \frac{1}{\gamma^{\mu} p_{\mu} - m}. \tag{39}$$

Warning: em geral os autoestados $\alpha(x)$ são matrizes (devido à presença das matrizes de Dirac) e portanto não comutam com $G(\alpha)$.

Note que no caso livre, temos:

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu)^2 e^{ip \cdot x} = p^2 e^{ip \cdot x}, \quad (40)$$

isto é, temos uma equação de autovalores (não há matrizes de Dirac à direita).

De forma análoga procuramos por estados \mathbb{E}_p tal que

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu)^2 \mathbb{E}_p = \bar{p}^2 \mathbb{E}_p, \quad (41)$$

sendo \bar{p}^2 o autovalor.

Vemos que

$$(\gamma^\mu \Pi_\mu)^2 = \Pi^2 - e\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \Pi^2 + e\Sigma^3 B \quad (42)$$

possui informação sobre o acoplamento do spin com o campo magnético a través de $\Sigma^3 B$.

Fixando o gauge

$$A^\mu = (0, 0, Bx, 0), \quad \rightarrow \quad \vec{B} = B\hat{z}, \quad (43)$$

chegamos à solução

$$\mathbb{E}_p = \text{diag}(\phi_n, \phi_{n-1}, \phi_n, \phi_{n-1}),$$
$$\phi_n = e^{-i(p_0 t + p_2 y + p_3 z)} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\omega \xi^2 / 2} H_n(\sqrt{\omega} \xi), \quad (44)$$

$$\xi = x - \frac{p_2}{\omega}, \quad \omega = eB.$$

$$\bar{p}^2 = p_0^2 - p_3^2 - 2n\omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (45)$$

Cálculo do Propagador

Na base de autoestados, o propagador é dado por

$$G(x, x') = \int_p \mathbb{E}_p(x) G(p) \mathbb{E}_p^\dagger(x'),$$

$$G(p) = G(\bar{p}) = \frac{1}{\gamma^\mu \bar{p}_\mu - m},$$

$$\bar{p} = (p_0, 0, \sqrt{2n\omega}, p_3). \quad (46)$$

Finalmente, os estados \mathbb{E}_p satisfazem

$$(\gamma \cdot \Pi)\mathbb{E}_p = \mathbb{E}_p(\gamma \cdot \bar{p}), \quad \bar{p} = (p_0, 0, \sqrt{2n\omega}, p_3). \quad (47)$$

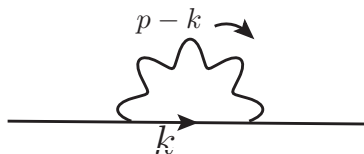
Portanto, definindo a função de onda Ψ como $\mathbb{E}_p u_{\bar{p}}$ temos para a equação de Dirac

$$(\gamma \cdot \Pi - m) \Psi = 0 \quad (48)$$

$$\mathbb{E}_p (\gamma \cdot \bar{p} - m) u_{\bar{p}} = 0 \quad (49)$$

Isto é, o espinor é o mesmo que de uma partícula livre com momenta \bar{p} .

Com o propagador fermiônico e bosônico pode-se obter o operador de massa $M(p, p')$, que é diagonal na base usada



(50)

A partir deste operador, podemos obter as correções ao momento giromagnético!!

O operador de massa é dado em representação integral por

$$M = (2\pi)^4 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{n,m} \int dr ds (\mathcal{E}_{0+} + \mathcal{E}_{0-} + \mathcal{E}_{1+} + \mathcal{E}_{1-}). \quad (51)$$

$\mathcal{E}_{0\pm}$ dá informação do spin inicial da partícula (+ quando o spin é paralelo ao campo magnético externo, e – quando antiparalelo).

$\mathcal{E}_{1\pm}$ se refere às amplitudes de transição do spin inicial σ' para o spin final σ tais que $\sigma = \sigma' \pm 1$.

Método de Ritus

└ Método de Ritus

└ Caso: campo magnético constante

Conclussões e afirmações

- ▶ O método de Ritus consiste em achar a representação diagonal do propagador em presença de um campo externo.
- ▶ Este permite obter uma representação diagramática semelhante ao caso do vácuo.
- ▶ É particularmente útil no caso de campos intensos.
- ▶ De fácil generalização para o caso de um campo EM constante.
- ▶ A partir do operador de massa, podem ser obtidas informações importantes como o momento giromagnético.