

Potential for Heavy-Quark Interaction from a Gluon Propagator from Lattice Simulations

Willian M. Serenone
Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

Orientadora: Tereza Mendes



Table of contents

- 1 Modelo de Potenciais
- 2 Propagador gluônico obtido via QCD na rede
- 3 Resultados
- 4 Conclusões

Aproximação Não-Relativística

- Massa do quark bottom: $m_b = 4.66(3)$ GeV
- Melhor caso — Massa do $\Upsilon(1S)$: $m_{\Upsilon(1S)} = 9.46030(26)$ GeV

$$\frac{T}{E_{\text{repouso}}} = \frac{m_{\Upsilon(1S)} - 2m_b}{2m_b} = \frac{0.1403}{9.320} = 0.0151$$

- Pior caso — Massa do $\Upsilon(11020)$: $m_{\Upsilon(11020)} = 11.019(8)$ GeV

$$\frac{T}{E_{\text{repouso}}} = \frac{m_{\Upsilon(11020)} - 2m_b}{2m_b} = \frac{1.699}{9.320} = 0.1823$$

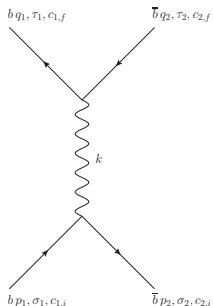
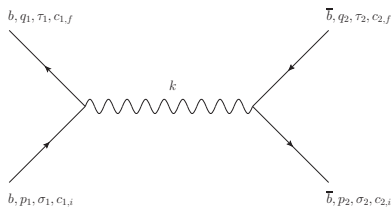
Níveis de energia podem ser determinados com boa aproximação via Eq. de Schrödinger

Motivação para o Potencial

- Cálculo da Amplitude de Espalhamento na 1ª Aprox. de Born

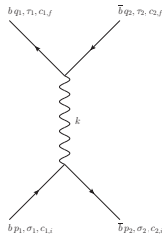
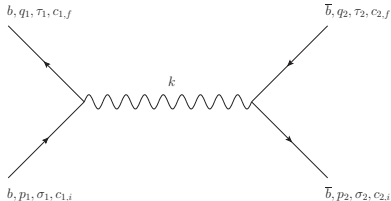
$$S_{fi} \equiv \langle f|i \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - P) T_{fi}$$

- Contribuição de dois diagramas de Feynman



Usando regras de Feynman

$$T_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\sqrt{E_{p_1} E_{p_2} E_{q_1} E_{q_2}}} \left[g_0^2 \bar{u}(q_1, \tau_1) c_{1,f}^\dagger \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} c_{1,i} u(p_1, \sigma_1) \delta^{ab} P_{\mu\nu}(k) \bar{v}(p_2, \sigma_2) c_{2,i}^\dagger \gamma^\nu \frac{\lambda^b}{2} c_{2,f} v(q_2, \tau_2) + g_0^2 \bar{v}(p_2, \sigma_2) c_{2,i}^\dagger \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} c_{1,i} u(p_1, \sigma_1) \delta^{ab} P_{\mu\nu}(k) \bar{u}(q_1, \tau_1) c_{1,f}^\dagger \gamma^\nu \frac{\lambda^b}{2} c_{2,f} v(q_2, \tau_2) \right]$$



Aproximação para os spinores

$$u = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \end{pmatrix} \chi_\sigma$$

$$\approx \begin{pmatrix} \chi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_\sigma^c$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_\sigma^c \end{pmatrix}$$

$$\chi_\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_\sigma^c = -i\sigma_2 \chi_\sigma$$

Gluon 4-momento no primeiro diagrama¹

$$k = p_1 - q_1 = (0, \mathbf{k})$$

$$k^2 = \mathbf{k}^2$$

Cálculo no CM

Gluon 4-momento no segundo diagrama²

$$k = p_1 + p_2 = (2E, 0)$$

$$\approx (2m, 0)$$

$$k^2 = -4m^2$$

Cálculo no CM

Cálculo do Potencial

Fator de cor

$$c_{1,f}^\dagger \frac{\lambda^a}{2} c_{1,i} c_{2,i}^\dagger \frac{\lambda^a}{2} c_{2,f} = \frac{4}{3}$$

$$c_{2,i}^\dagger \frac{\lambda^a}{2} c_{1,i} c_{1,f}^\dagger \frac{\lambda^a}{2} c_{2,f} = 0$$

Cálculo do potencial

$$V(r) = -(2\pi)^3 \int \exp(-ik \cdot r) T_{fi}(k) d^3k$$

$$T_{fi} = -\frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4}{3} g_0^2 \delta^{\mu 0} \delta_{\sigma_1 \tau_1} P_{\mu\nu}(k) \delta^{\nu 0} \delta_{\sigma_2 \tau_2} = -\frac{4}{3} \frac{g_0^2}{(2\pi)^6} P_{00}(k) \delta_{\sigma_1 \tau_1} \delta_{\sigma_2 \tau_2}$$

Se o gluon se comportar como o foton: $P_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2}$,

$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(-ik \cdot r) \frac{g_0^2}{k^2} d^3k = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$$

Propagador gluônico obtido via QCD na rede

A. Cucchieri, D. Dudal, T. Mendes and N. Vandersickel, Phys. Rev. D **85**, 094513 (2012) [arXiv:1111.2327 [hep-lat]].

$$P_{\mu\nu}(k) = \frac{C(s^2 + k^2)}{t^2 + u^2 k^2 + k^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \rightarrow \frac{C(s^2 + k^2)}{t^2 + u^2 k^2 + k^4} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

Parametros

$$C = 0.784, s = 2.508$$

$$u = 0.768, t = 0.720$$

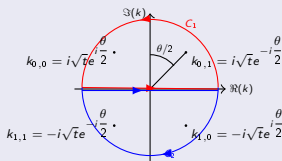
Aprox. Não-Relativística

$$P_{00}(\mathbf{k}) = -\frac{C(s^2 + \mathbf{k}^2)}{t^2 + u^2 \mathbf{k}^2 + \mathbf{k}^4}$$

$$T_{fi} = -\frac{4}{3} g_0^2 P_{00}(k)$$

Cálculo do potencial

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{4}{3} \frac{g_0^2}{(2\pi)^3} \int e^{-ikr \cos \theta} P_{00}(\mathbf{k}) k^2 \sin \theta d\varphi d\theta dk \\ &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{i\pi r} \int_0^\infty (e^{ikr} - e^{-ikr}) P_{00}(\mathbf{k}) k dk \end{aligned}$$



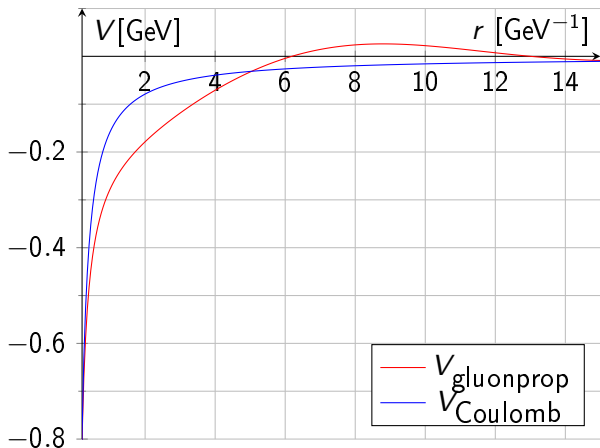
$$k_{m,n} = (-1)^m i\sqrt{t} \times e[(-1)^n i\frac{\theta}{2}]$$

$$\theta \equiv \arctan \left(\frac{\sqrt{4t^2 - u^4}}{u^2} \right)$$

Integração por resíduos

$$\begin{aligned}
 V(r) &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \frac{C}{2} \left[\frac{(s + k_{0,0}^2) e^{ik_{0,0}r}}{u^2 + 2k_{0,0}^2} + \frac{(s + k_{0,1}^2) e^{ik_{0,1}r}}{u^2 + 2k_{0,1}^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(s + k_{1,1}^2) e^{-ik_{1,1}r}}{u^2 + 2k_{0,1}^2} + \frac{(s + k_{1,0}^2) e^{-ik_{1,0}r}}{u^2 + 2k_{1,0}^2} \right] \\
 &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} 2C \Re \left[\frac{(s + k_{0,0}^2) e^{ik_{0,0}r}}{u^2 + 2k_{0,0}^2} \right] \\
 &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \frac{C}{\sqrt{\Delta}} e^{-r\sqrt{t} \cos \frac{\theta}{2}} \left[\sqrt{\Delta} \cos \left(r\sqrt{t} \sin \frac{\theta}{2} \right) - (u^2 - 2s) \sin \left(r\sqrt{t} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \\
 \Delta &\equiv 4t^2 - u^4
 \end{aligned}$$

Potencial baseado em propagador gluônico obtido via QCD na rede



Termo linear do potencial

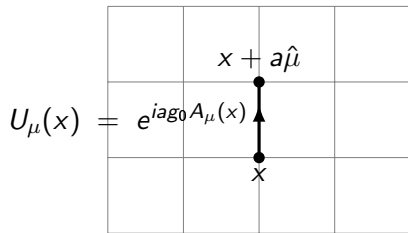
- Potencial acima de origem essencialmente perturbativa
- Não reproduz confinamento
- Introdução de um termo linear motivado pela expansão de acoplamento forte do loop de Wilson

Discretização da ação na rede

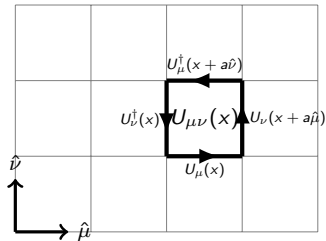
$$S = \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a} d^4x \rightarrow \sum_x \sum_{C(\mu, \nu)} \frac{2n}{g_0^2} \left\{ 1 - \frac{1}{n} \Re \text{Tr} [U_{\mu\nu}(x)] \right\}$$

$$U_{\mu\nu} = U_\mu(x) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x)$$

Links e Plaquetas

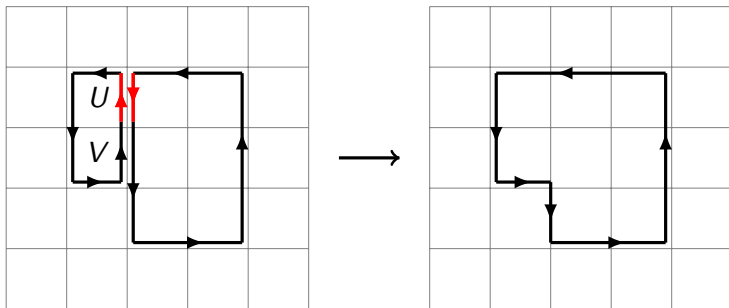


Associação de um elemento de grupo com um link da rede



Representação gráfica de uma plaqueta

Integração de Grupo



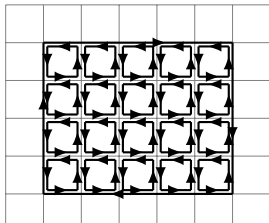
Integrar sob um link em comum de dois loops leva a fusão dos mesmos e um fator multiplicativo $1/n$.

Termo linear do potencial

Expandindo a exponencial no valor esperado do loop de Wilson

$$\langle W(I, J) \rangle = Z^{-1} \int \mathcal{D}U \exp(-S) \text{Tr} \left[\prod_x U_\mu(x) \right]$$

$$\approx \langle W(I, J) \rangle = \left(\frac{\beta}{2} \right)^{3IJ-1}$$



$$V(aJ) = \frac{1}{aJ} \ln \left[\frac{\langle W(aJ, aJ) \rangle e^{E_0 t}}{|\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 1 \rangle|^2} \right]$$

$$V(r) = F_0 r$$

Resultados para o Botomônio

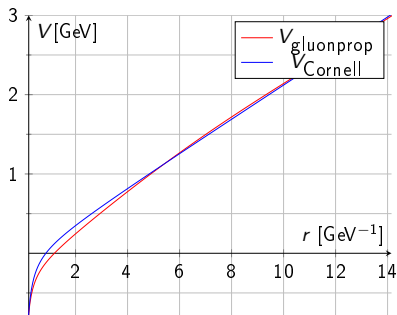
Parâmetros livres: F_0 e m_b

$m_b(\overline{MS}) = 4.18(3)$ GeV $m_b(1S) = 4.66(3)$ GeV Ver PDG		Potencial do propagador calculado na rede	$F_0 = 0.2118(1)$ GeV ² $m_b = 4.5977(1)$ GeV $R = 0.0436$	Coulomb mais Potencial Linear	$F_0 = 0.2136(1)$ GeV ² $m_b = 4.6090(1)$ GeV $R = 0.0475$
Estado da Partícula	Massa Experimental(GeV)	Massa Calculada ($\pm 3 \times 10^{-4}$ GeV)	Desvio do Experimento (GeV)	Massa Calculada ($\pm 3 \times 10^{-4}$ GeV)	Desvio do Experimento (GeV)
1S*	9.42565(153)	9.5763	0.1507	9.5793	0.1528
2S	10.02326(31)	10.0071	0.0162	10.0029	0.0204
3S	10.3552(5)	10.3317	0.0235	10.3293	0.0259
4S	10.5794(12)	10.6107	0.0313	10.6119	0.0325
5S	10.876(11)	10.8633	0.0127	10.8675	0.0085
6S	11.019(8)	11.0973	0.0783	11.1045	0.0855
1P*	9.89076(82)	9.8595	0.0313	9.8565	0.0343
2P*	10.25410(94)	10.2033	0.0508	10.2009	0.0532
3P	10.530(14)	10.4943	0.0357	10.4949	0.0351
1D	10.1637(14)	10.0743	0.0894	10.0683	0.0954

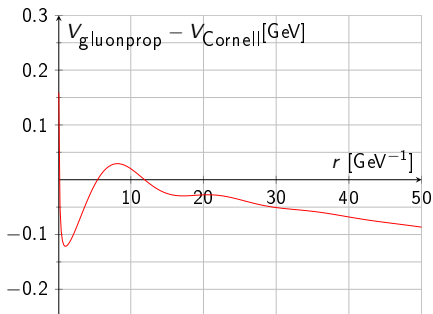
Estados marcados com “*” são médias de estados com mesmo momento angular, mas diferente spins.

Resultados para o Botomônio

Comparação entre potenciais



$V_{\text{gluonprop}} - V_{\text{Cornell}}$



- Potencial do propagador gluônico obtido via QCD na rede parece concordar um pouco melhor com dados experimentais.
- Como foi obtido de forma não-perturbativa e através de redes grandes ($N = 128^4$), este propagador possui mais informação na região infravermelha;
 - Não é esperado que essa informação extra sobreviva a expansão perturbativa.
 - Melhora nos resultados poderia indicar que parte dessa melhora “escapa” para o termo perturbativo.
- Limitações:
 - Não leva em conta interações spin-spin e spin-órbita
 - Como consequência é incapaz de descrever quebras de degenerescência, como ocorre no $1S$, $1P$ e $2P$.
 - Presença de erros vindo da aproximação não relativística.