

# Experimento de Millikan

RODRIGO CARDOSO LEON (077067) E LUCAS DE OLIVEIRA LOPES (119757))

rleonprofessor@gmail.com, lucaslopes1@gmail.com

Instituto de Física "Gleb Wataghin" - UNICAMP

27 de setembro de 2017

## Resumo

O objetivo deste trabalho é verificar a hipótese de quantização da carga elétrica, bem como seu valor elementar reproduzindo o experimento realizado por Robert A. Millikan, publicado em 1913 comprovando a hipótese de quantização. Utilizando um equipamento muito semelhante ao usado por Millikan colhemos dados que nos mostram a quantização e a carga fundamental encontrada foi de  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$  com um erro desprezível condizendo com valor já conhecido.

opa!

## I. INTRODUÇÃO

O experimento de Millikan ou experimento de queda de óleo, como ficou conhecido, foi desenvolvido por Robert A. Millikan a fim de estudar a quantização da carga elétrica. Em suma, o experimento consiste em observar o movimento de várias gotículas de óleo ionizadas confinadas entre duas placas que possuem uma diferença de potencial elétrico entre si.[2]

As gotículas ficam sujeitas às forças gravitacional, de atrito com o ar, elétrica, quando o campo elétrico entre as placas é ligado, e empuxo. Entretanto, como o empuxo é proporcional ao volume da gotícula e à densidade do ar e esta, por sua vez, é aproximadamente três ordens de grandeza menor que a densidade média dos óleos conhecidos, podemos desconsiderá-lo por ser muito pequeno comparado às outras forças.[1]

A figura 1 mostra as direções das forças para as possíveis combinações de campo elétrico.

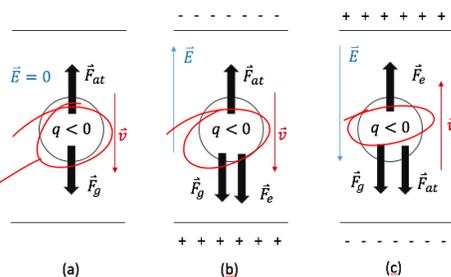


Figura 1: (a) forças sem a ação do campo elétrico.  
(b) forças com a com o campo elétrico orientado para cima.  
(c) forças com o campo elétrico orientado para baixo.

A força de atrito com o ar pode ser escrita utilizando a Lei de Stokes que prevê, para um corpo se deslocando em um fluido, uma força contrária ao seu movimento e proporcional a sua velocidade tal que:

$$F_{at} = kv \quad (1)$$

onde  $k$  é uma constante e  $v$  é a velocidade do corpo. A Lei de Stokes também pode ser escrita de forma mais criteriosa na forma

$$F_{at} = 6\pi a \eta v \quad (2)$$

onde  $a$  é o raio do corpo (gotícula) e  $\eta$  é a viscosidade do fluido (ar).

A força gravitacional é dada por

$$F_g = mg \quad (3)$$

mas também pode ser escrita em função do raio e da densidade da gotícula

$$F_g = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g \quad (4)$$

onde  $\rho$  e  $g$  são a densidade do óleo e a aceleração da gravidade respectivamente.

Para a força elétrica podemos escrever

$$F_e = q \left( \frac{V}{d} \right) = E \quad \text{se } CEU! \quad (5)$$

onde  $q$  é a carga elétrica da gotícula,  $V$  e  $d$  são diferença de potencial e distância entre os pratos respectivamente.

Como a força de atrito com o ar é proporcional a velocidade, rapidamente as gotículas atingem a velocidade

$q < 0$   
sempre?

68  
P

terminal de seus movimentos e podemos escrever

$$F_{at} - F_g = 0 \quad (6)$$

para a configuração (a) da figura 1 onde a gotícula desce e o campo elétrico é nulo,

$$F_g + F_e - F_{at_d} = 0 \quad (7)$$

para a configuração (b) da figura 1 onde a gotícula desce e o campo elétrico está orientado para cima, por fim

$$F_g - F_e + F_{at_s} = 0 \quad (8)$$

para a configuração (c) da figura 1, onde a gotícula sobe e o campo elétrico está orientado para baixo.

Para determinar a carga  $q$  de cada gotícula podemos substituir as equações (1), (4) e (5) nos devidos termos das equações (7) e (8) que nos fornecem respectivamente

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho g + q \frac{V}{d} - 6\pi \eta a v_d = 0 \quad (9)$$

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho g - q \frac{V}{d} + 6\pi \eta a v_s = 0 \quad (10)$$

Igualando as expressões (9) e (10) e fazendo as devidas manipulações algébricas, temos

$$q = \frac{3\pi \eta a d}{V} (v_s + v_d) \quad (11)$$

Onde  $v_d$  e  $v_s$  são respectivamente as velocidades limites nos casos (b) e (c) da figura 1.

Note que a carga da partícula depende de seu raio, logo para determinar a carga de uma gotícula precisamos conhecer seu raio. Somando as equações (9) e (10) obtemos uma expressão para o raio  $a$  da gotícula.

$$a = \sqrt{\frac{9\eta}{4g\rho} (v_d - v_s)} \quad (12)$$

Aqui devemos lembrar que a viscosidade efetiva  $\eta_{ef}$  do ar depende da temperatura e pressão e por isso devemos corrigi-la. Essa correção pode ser feita através da expressão [2]

$$\eta_{ef} = \eta_0 \left( \frac{1}{1 + \frac{b}{aP}} \right) \quad (13)$$

onde  $b$  é uma constante,  $P$  é a pressão a qual o fluido está submetido,  $a$  é o raio da gotícula e  $\eta_0$  é uma função da temperatura  $\eta_0(T)$ . Substituindo a equação (13) na equação (12) e fazendo as devidas manipulações algébricas temos

$$a = -\frac{b}{2P} + \sqrt{\left(\frac{b}{4P}\right)^2 + \frac{9\eta_0}{4g\rho} (v_d - v_s)} \quad (14)$$

Substituindo a equação (14) na equação (11) é fácil ver que

$$q = \frac{3\pi \eta d}{V} \left[ -\frac{b}{2P} + \sqrt{\left(\frac{b}{4P}\right)^2 + \frac{9\eta_0}{4g\rho} (v_d - v_s)} \right] (v_s + v_d) \quad (15)$$

Aqui as unidades são todas apresentadas no SI

$q$  - carga da gotícula em C;

$\rho$  - densidade do óleo em  $kg/m^3$ ;

$g$  - aceleração da gravidade em  $m/s^2$ ;

$b$  - constante igual a  $8.20 \cdot 10^{-3} Pa \cdot m$  [1];

$P$  - pressão barométrica em Pa;

$\eta_0$  - viscosidade do ar a uma determinada temperatura em  $Ns/m^2$ ;

$d$  - distância entre as placas do condensador em m;

$V$  - d.d.p entre as placas do condensador em V;

$v_d$  - velocidade de descida da partícula em  $m/s$ ;

$v_s$  - velocidade de subida da partícula em  $m/s$ .

Sabendo a carga de cada gotícula é possível calcular a carga de um elétron através de uma análise que será apresentada adiante.

## II. DETALHES EXPERIMENTAIS

Trabalhamos com o aparato PASCO científico, modelo AP-8210, próprio para realização deste experimento. Sua montagem segue como as figuras 2, 3 e 4. Nele constam [1]

*inicialmente vcs estavam considerando o empuxo mas desistiram aqui! p.9?*

- Fonte luminosa: sua luz é direcionada para a região onde se encontram as gotículas tornando-as visíveis.
- Microscópio associado a grade milimetrada: permite acompanhar o movimento das gotículas com precisão.
- Fonte de radiação: contendo  $\text{tório-232}$ , responsável por ionizar as gotículas.
- Placas de latão: trabalham com capacitores para gerar o campo elétrico.
- Espaçador polimérico: com  $d = (7.6 \pm 0.05) \text{ mm}$  de espessura colocado entre as placas.
- Fonte de Tensão DC: ajustada para fornecer  $V = (500 \pm 1) \text{ V}$  entre as placas.
- Chave elétrica: liga, desliga e inverte a polarização das placas.
- Pulverizador de óleo: contendo óleo mineral de  $(886 \pm 1) \text{ kg/m}^3$ .

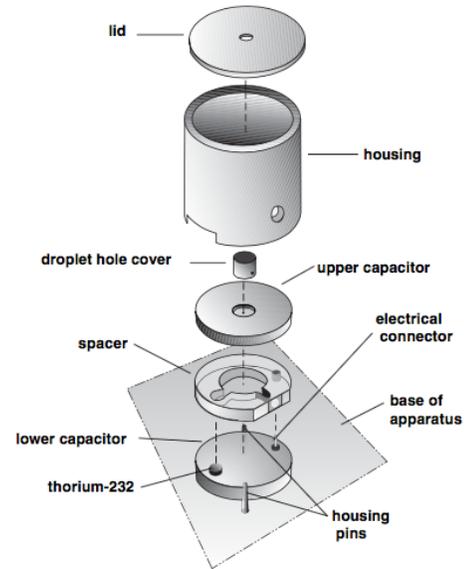


Figura 4: Detalhe da montagem das placas de latão e separador.[1]

Além dos itens contidos no aparato PASCO científico utilizamos

- computador: contendo o software TRACKER que permite acompanhar o movimento das gotículas frame a frame fornecendo um erro temporal de  $\pm 0.07 \text{ s}$  (tempo entre dois frames).
- Webcam: ligada ao computador e posicionada em frente ao microscópio de forma a gravar vídeos dos movimentos das gotículas para serem utilizados no TRACKER.

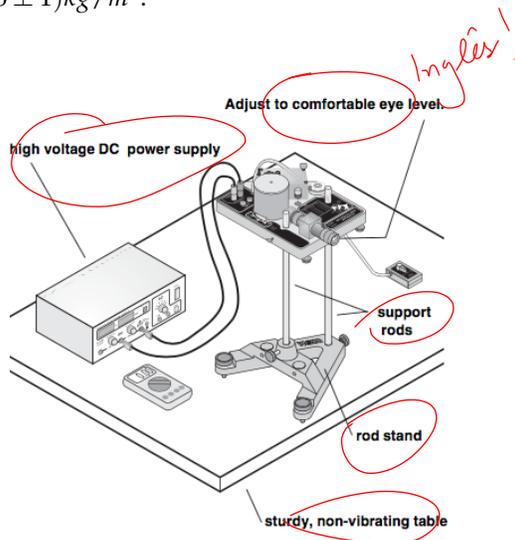


Figura 2: Visão geral do aparato montado com a fonte de tensão.[1]

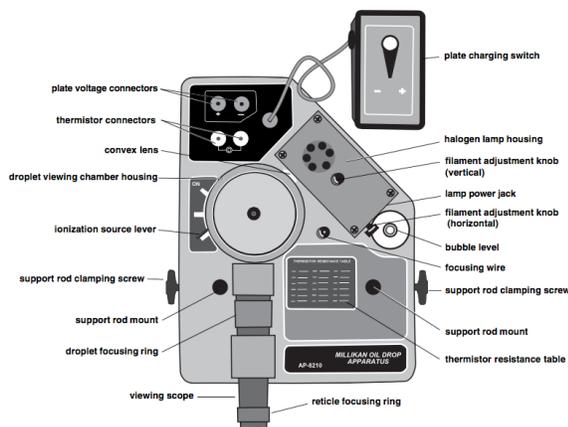


Figura 3: Detalhe dos componentes que constituem o aparato.[1]

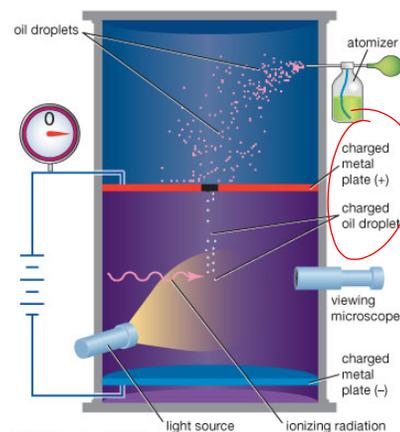


Figura 5: Detalhe do processo que ocorre dentro do aparato após a injeção das gotículas.[4]

Após a montagem do equipamento, utilizamos o pulverizador para inserir gotículas de óleo na região entre as placas, ligamos o ionizador e gravamos vídeos

das gotículas se movimentando com o campo elétrico desligado e ligado (com sentido para cima e para baixo). As três configurações de campo elétrico foram alternadas diversas vezes para um mesmo conjunto de gotículas, assim temos a medida dos tempos de subida  $t_s$ , descida  $t_d$  e queda livre  $t_0$ . Pode-se ter ideia do que ocorre dentro do aparato observando a figura 6.

Fixamos uma distância  $s = (0.5 \pm 0.05) \text{ mm}$  para o deslocamento. Com o erro de metade da menor medida da grade associada ao microscópio, conforme apresentado na figura ??.

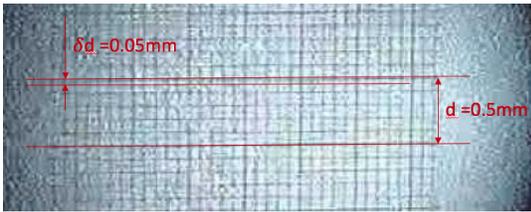


Figura 6: Imagem da grade milimetrada associada ao microscópico

Coletamos dados de 30 gotículas diferentes, como esse número é baixo em relação ao número de gotículas coletadas no trabalho de Millikan (9000), selecionamos gotículas com velocidades terminais que variam de  $0,02 \text{ mm/s}$  a  $0,05 \text{ mm/s}$  quando o campo elétrico está desligado. Nesta faixa de velocidades terminais, atingidas em milissegundos, temos gotículas com características que minimizam nossos erros[1].

*quais?*

### III. RESULTADOS, ANÁLISE DE DADOS E DISCUSSÕES

Os tempos médios de subida e descida foram coletados 5 vezes para cada partícula e assim temos[3]

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^5 t_k \quad (16)$$

Para essa média temos um erro associado

$$\delta \bar{t} = \sqrt{\left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^5 (\bar{t} - t_k) \right)^2 + (\delta f)^2} \quad (17)$$

onde  $\delta f = \pm 0.07 \text{ s}$  que é o erro apresentado pelo TRACKER.

Com o tempo médio e mantendo fixo o deslocamento observado, tanto para a subida quanto para a descida, podemos escrever

$$v = \frac{s}{\bar{t}} \quad (18)$$

Para o erro associado a velocidade temos

$$\delta v = \frac{1}{\bar{t}} \sqrt{v^2 (\delta \bar{t})^2 + (\delta s)^2} \quad (19)$$

Calculando o erro, utilizando propagação de erros, para o raio a gotícula apresentado na equação (14) temos

$$\begin{aligned} \delta a = & \left[ \left( \frac{9\eta_0}{8B\rho} (v_d - v_s) \right)^2 (\delta \eta_0)^2 + \right. \\ & \left( \frac{9\eta_0}{8B\rho} (v_d - v_s) \right)^2 (\delta \rho)^2 + \\ & \left( \frac{9\eta_0}{8B\rho} \right)^2 (\delta v_s)^2 + \left( \frac{9\eta_0}{8B\rho} \right)^2 (\delta v_d)^2 + \\ & \left. \left( \frac{b}{2P^2} - \frac{b^2}{4P^3 B} \right)^2 (\delta P)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20) \end{aligned}$$

onde  $B = \left( a + \frac{b}{P} \right)$ ,  $\eta_0 = (18,2 \pm 1) 10^{-6} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$  e  $P = (1020 \pm 10) \text{ hPa}$ .

Considerando a equação (11) para a carga da gotícula, seu erro fica na forma

$$\delta q = q \left[ \left( \frac{\delta a}{a} \right)^2 + \left( \frac{\delta d}{d} \right)^2 + \left( \frac{\delta V}{V} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{(\delta v_s)^2 + (\delta v_d)^2}}{v_s + v_d} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

A tabela 1 mostra os tempos médios de subida  $\bar{t}_s$  e de descida  $\bar{t}_d$  juntamente com seus erros calculados a partir dos dados coletados e das equações (16) e (17)

Tabela 1: Tempos médios de descida e subida *do que?* com seus respectivos erros.

Gota	$\bar{t}_s$ (s)	$\delta \bar{t}_s$ (s)	$\bar{t}_d$ (s)	$\delta \bar{t}_d$ (s)
1	4.2	$\pm 0.1$	3.07	$\pm 0.07$
2	4.4	$\pm 0.1$	2.70	$\pm 0.06$
3	5.6	$\pm 0.1$	1.21	$\pm 0.03$
4	3.45	$\pm 0.08$	2.15	$\pm 0.05$
5	10.2	$\pm 0.2$	5.4	$\pm 0.1$
6	6.0	$\pm 0.1$	3.33	$\pm 0.08$
7	7.0	$\pm 0.1$	3.6	$\pm 0.08$
8	3.5	$\pm 0.1$	1.92	$\pm 0.04$
9	3.36	$\pm 0.08$	2.73	$\pm 0.06$
10	6.67	$\pm 0.08$	3.85	$\pm 0.09$
11	6.9	$\pm 0.1$	5.0	$\pm 0.1$
12	3.55	$\pm 0.08$	2.55	$\pm 0.06$
13	3.27	$\pm 0.08$	2.48	$\pm 0.06$
14	6.2	$\pm 0.1$	2.67	$\pm 0.06$

15	50	±1	5.5	±0.1
16	4.5	±0.1	2.49	±0.06
17	4.6	±0.1	2.59	±0.06
18	1.51	±0.03	1.28	±0.03
19	2.89	±0.07	2.23	±0.05
20	1.35	±0.03	1.23	±0.03
21	1.64	±0.04	1.34	±0.03
22	12.7	±0.3	5.5	±0.1
23	9.8	±0.2	5.5	±0.1
24	1.87	±0.04	1.85	±0.05
25	2.15	±0.05	1.9	±0.1
26	15.1	±0.3	3.7	±0.1
27	2.66	±0.06	1.97	±0.04
28	4.8	±0.1	4.0	±0.1
29	1.7	±0.1	1.64	±0.04
30	2.76	±0.04	2.22	±0.05

A tabla 2 mostra as velocidades de subida  $\bar{v}_s$  e de descida  $\bar{v}_d$  juntamente com seus erros calculados a partir dos dados coletados e das equações (18) e (19)

**Tabela 2:** Velocidade de descida e subida com seus respectivos erros.

Gota	$\bar{v}_s$ ( $10^{-4} \frac{m}{s}$ )	$\delta\bar{v}_s$ ( $10^{-5} \frac{m}{s}$ )	$\bar{v}_d$ ( $10^{-4} \frac{m}{s}$ )	$\delta\bar{v}_d$ ( $10^{-5} \frac{m}{s}$ )
1	1.2	±3	1.6	±4
2	1.1	±3	1.8	±3
3	0.9	±2	4.1	±1
4	1.4	±4	2.3	±8
5	0.5	±1	0.9	±2
6	0.8	±2	1.5	±4
7	0.7	±2	1.4	±6
8	1.4	±4	2.6	±7
9	1.5	±4	1.8	±5
10	0.7	±2	1.3	±3
11	0.7	±2	1.0	±3
12	1.4	±2	1.9	±5
13	1.5	±4	2.0	±5
14	0.8	±4	1.9	±5
15	0.0	±2	0.9	±2
16	1.1	±3	2.0	±4
17	1.1	±3	1.9	±5
18	3.3	±3	3.9	±9
19	1.7	±8	3.0	±9
20	3.7	±4	2.2	±2
21	3.0	±9	4.0	±7
22	0.4	±8	3.7	±7
23	0.5	±9	0.9	±3
24	2.7	±9	0.9	±8
25	2.3	±6	2.7	±9

*motacões!*

25	2.3	±8	2.6	±9
26	0.3	±5	1.3	±3
27	1.8	±3	2.5	±2
28	1.0	±3	1.2	±5
29	2.8	±7	3.0	±3
30	1.8	±5	2.2	±5

A tabla 3 mostra os raios para cada gotícula juntamente com seus erros calculados a partir das velocidades calculadas, dados já citados neste trabalho:  $b = 8.2 \cdot 10^{-3} mPa[1]$ ,  $\eta_0 = 18,2 \cdot 10^{-6} Ns/m^2$ ,  $\rho = 886 kg/m^3[1]$  e  $P = 1,02 hPa[5]$  e das equações (14) e (20).

**Tabela 3:** Raio calculado para a gotícula com seus respectivos erros.

Gota	$a$ ( $10^{-7} m$ )	$\delta a$ ( $10^{-8} m$ )
1	4.5	±8
2	5.7	±9
3	1	±20
4	6	±10
5	4.5	±8
6	5.6	±9
7	5.6	±9
8	7	±10
9	4.0	±7
10	5.0	±9
11	3.6	±6
12	5.0	±9
13	4.8	±6
14	7.0	±9
15	6.1	±8
16	6	±10
17	6	±10
18	5	±10
19	4	±10
20	4.0	±9
21	5.6	±8
22	4.9	±7
23	4.3	±9
24	1.2	±8
25	3.7	±7
26	6.8	±2
27	5.5	±6
28	3	±10
29	3.1	±9
30	4.5	±7

*Abraçamente a notação está mal!*

A tabla 4 apresenta as cargas para cada gotícula juntamente com seus erros calculados a partir das velocidades, raios calculados e das equações (15) e (21).

**Tabela 4:** Cargas calculadas para as gotículas com seus respectivos erros.

Gota	$q$ ( $10^{-19}$ C)	$\delta q$ ( $10^{-20}$ C)
1	2.3	$\pm 2$
2	4.5	$\pm 2$
3	16.1	$\pm 8$
4	6.4	$\pm 3$
5	1.65	$\pm 0.8$
6	3.4	$\pm 2$
7	3.1	$\pm 2$
8	7.8	$\pm 4$
9	3.4	$\pm 2$
10	2.7	$\pm 1$
11	1.63	$\pm 0.9$
12	4.4	$\pm 2$
13	4.4	$\pm 2$
14	4.9	$\pm 2$
15	1.62	$\pm 0.8$
16	5.3	$\pm 3$
17	4.9	$\pm 2$
18	9.8	$\pm 5$
19	5.0	$\pm 3$
20	8.1	$\pm 5$
21	9.9	$\pm 5$
22	1.7	$\pm 0.8$
23	1.6	$\pm 0.6$
24	1.7	$\pm 9$
25	4.8	$\pm 5$
26	3.0	$\pm 3$
27	6.4	$\pm 4$
28	1.87	$\pm 0.9$
29	4.8	$\pm 2$
30	4.8	$\pm 1$

Notas!

**Tabela 5:** Número  $n$  de partículas elementares para cada gotícula de carga  $q$ .

Gota	$q$ ( $10^{-19}$ C)	$\frac{q}{q_0}$
1	2.3	2.1
2	4.5	2.8
3	16.1	10.1
4	6.4	4.0
5	1.65	1.0
6	3.4	2.1
7	3.1	1.9
8	7.8	4.9
9	3.4	2.2
10	2.7	1.7
11	1.6	1.0
12	4.4	2.8
13	4.4	2.8
14	4.9	3.1
15	1.62	1.0
16	5.3	3.3
17	4.9	3.2
18	9.8	6.1
19	5.0	3.2
20	8.1	5.1
21	9.9	6.2
22	1.7	1.0
23	1.6	1.0
24	1.7	1.1
25	4.8	3.0
26	3.0	1.9
27	6.4	4.0
28	1.87	1.2
29	4.8	3.0
30	4.8	3.0

Deveriam ter feito um Histograma!

Para determinar a carga elementar, escolhemos a gota que apresenta menor ~~menor~~ carga  $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C e dividimos todos outros valores por ela, obtendo assim a tabela 5. Escolhemos este método de verificar a existência ou não de uma relação linear entre a carga  $q$  e uma carga elementar  $e$  como mostra a equação (22)[3].

$$q = ne \tag{22}$$

onde  $n$  é o número de cargas na gotícula e  $q_0$  é a carga da gotícula de menor carga.

Com esses dados plotamos o gráfico da figura 7.

Temos, então, uma reta onde o coeficiente angular é numericamente igual a carga elementar  $e = (1.6 \cdot 10^{-19} \pm 4 \cdot 10^{-28})$ C e um coeficiente linear  $b = 9.6 \cdot 10^{-35}$  que pode ser considerado desprezível.

Outra forma não tão precisa, mas válida, é organizar as gotículas da menor para a maior carga e enumerá-las. Assim temos o gráfico da figura 7.8

Podemos notar que as gotículas agrupam-se em conjuntos de cargas aproximadas:  $1e$ ,  $2e$ ,  $3e$  e assim sucessivamente. Devido ao erro associado aos valores das cargas, podemos calcular a carga média de cada conjunto e analisar o quanto a média dista da próxima em Coulombs. Os resultados obtidos, já apresentados no gráfico, estão muito próximos da carga elementar de

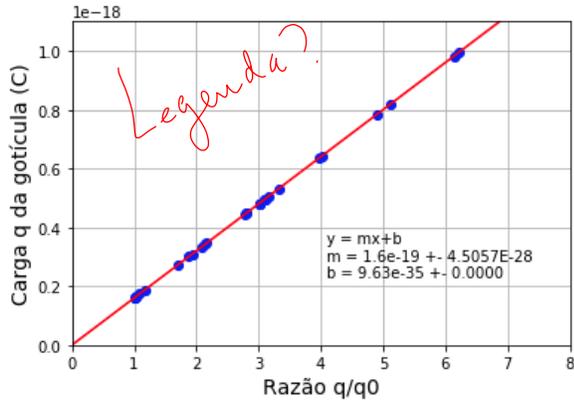


Figura 7: Gráfico  $q \times n$  para a verificação da existência de uma carga elementar.

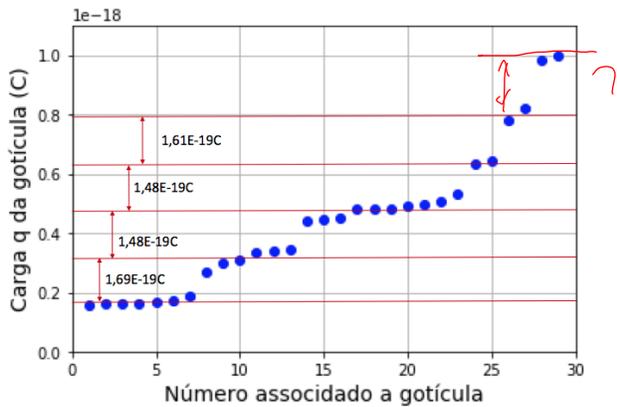


Figura 8: Gráfico para a segunda forma de determinar a carga elementar.

$1.6 \cdot 10^{19}$  com no máximo 10 por cento de erro em relação a este valor. O que o torna um método de análise razoável.

#### IV. CONCLUSÃO

Com uma pesquisa breve, percebe-se que a análise dos dados pode ser feita de diversas formas diferentes: usando os tempos médios para as três configurações da figura 1 ou apenas duas. Em nossa análise usamos as configurações (b) e (c) da figura 1. O gráfico da figura 7 se ajusta muito bem à uma reta, o que confirma a hipótese de quantização de carga. O coeficiente angular obtido foi  $e = 1.6 \cdot 10^{19}C$  com um erro muito pequeno comparado ao seu valor e coincidindo com a carga elementar já conhecida para o elétron. O gráfico da figura 8 nos mostra de forma satisfatória a quantização de carga bem como seu valor elementar.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Manual PASCO Scientific AP-8210; ✓
- [2] Melissinos, Adrian C., Napolitano, Jim, Experiments in Modern Physics, Academic Press, Cap. 1; ✓
- [3] www.ifsc.usp.br/ lavfis2; ✓
- [4] www.britannica.com; ✓
- [5] www.cepagri.unicamp.br/ ✓