

Sumário

1	Números complexos	2
2	Grandezas Básicas	4
3	Leis de kirchhoff	4
4	Associação de resistores	5
5	Teorema de Thévenin	6
6	Príncpio da superposição e Transformada de Fourier	8
7	Impedância	9
7.1	Impedância de uma resistência	9
7.2	Impedância de um capacitor	9
7.3	Impedância de um indutor	10
7.4	Divisor de tensão generalizado	11
7.5	Filtros passivos	11
7.5.1	<i>High-pass filter</i>	11
7.5.2	<i>Low-pass filter</i>	13
7.5.3	Filtro passa banda	14
7.5.4	Filtro passa banda com indutor	16
7.5.5	Filtro corta banda	18
7.6	Pontes	19
7.7	Oscilador Amortecido	21
7.7.1	Caso $\omega_0 > \gamma$	23
7.7.2	Caso $\omega_0 < \gamma$	24
7.7.3	Caso $\omega_0 = \gamma$	24

1 Números complexos

Uma variável complexa pode ser escrita na forma canônica $z = a + jb$, em que a e b são dois números reais e j é definido como $j = \sqrt{-1}$. Também podemos escrever um número complexo como $z = A e^{j\phi}$, sendo $e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$. Esta igualdade é denominada Fórmula de Euler que se demonstra como segue.

Considere inicialmente $f(x) = \cos(x) + j\sin(x)$,

$$\frac{df(x)}{dx} = -\sin(x) + j\cos(x) = j(\cos(x) + j\sin(x)) = jf(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = jf(x) \Rightarrow \frac{1}{f(x)}df(x) = jdx$$

Integrando esta equação entre 0 e y temos:

$$\int_0^y \frac{1}{f(x)}df(x) = \int_0^y jdx$$

$$\int_0^y \frac{1}{f(x)}df(x) = \int_0^y jdx$$

$$\ln(f(x)) \Big|_0^y = jx \Big|_0^y \Rightarrow \ln(f(y)) - \ln(f(0)) = jy$$

Mas $f(0) = \cos(0) + j\sin(0) = 1$ e $\ln(1) = 0$, portanto

$$\ln(f(y)) = jy \Rightarrow f(y) = e^{jy}$$

Dessa Fórmula Euler obtemos que:

$$a = A\cos\phi$$

$$b = A\sin\phi$$

e

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \arctang\frac{b}{a}$$

Note que o complexo conjugado de $z = a + jb$ é $z^* = a - jb$. Na forma exponencial temos que o complexo conjugado de $z = A e^{j\phi}$ é $z^* = A e^{-j\phi}$. Assim temos que $zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$ e que $zz^* = (A e^{j\phi})(A e^{-j\phi}) = A^2$. De onde resulta que $A^2 = a^2 + b^2$.

Definindo $z_1 = a_1 + jb_1 = A_1 e^{j\phi_1}$ e $z_2 = a_2 + jb_2 = A_2 e^{j\phi_2}$. Soma de números complexos é por:

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j = A_1 e^{j\phi_1} + A_2 e^{j\phi_2}$$

e a subtração de números complexos é por:

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)j = A_1 e^{j\phi_1} - A_2 e^{j\phi_2}$$

Note que a soma ou a subtração de números complexos é mais conveniente na forma canônica.

Por outro lado, a multiplicação de dois números complexos é dado por:

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) = A_1 A_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

e a divisão de números complexos é por:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

Note que a multiplicação ou a divisão de números complexos é mais conveniente na forma exponencial.

Por último, temos que:

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

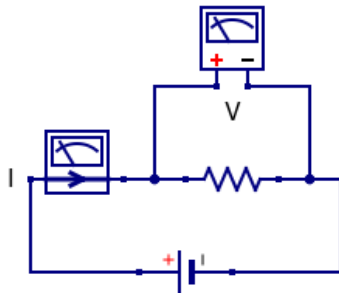
$$-j = e^{j\frac{-\pi}{2}}$$

2 Grandezas Básicas

Potencial elétrico (tensão, voltagem, diferença de potencial, ddp, força eletromotriz, EMF): energia necessária para mover uma unidade de carga do menor potencial para o maior. Unidade: Volt. Normalmente indicada pela letra V , v , U ou u .

Corrente: Fluxo de carga em função do tempo em uma seção transversal. Unidade: Ampere = 1 C/s, $1\text{ C} \sim 10^{18}$ elétrons. Normalmente indicada pela letra I ou i .

Potência: $P = VI$ é a energia por unidade de tempo entre pela corrente I ao sobre uma queda de potencial V .



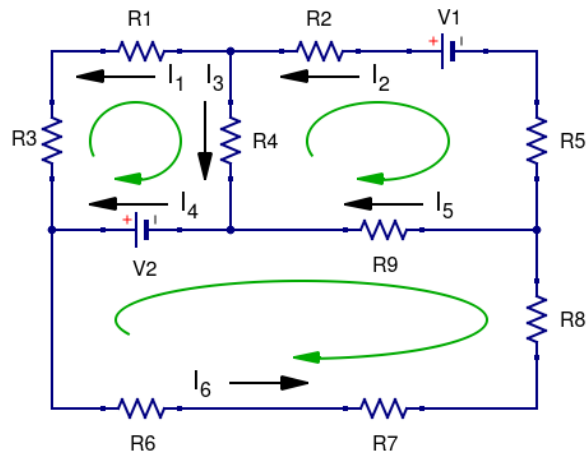
3 Leis de Kirchhoff

1) A soma algébrica de todas as voltagens em torno de qualquer caminho fechado de circuito, retornando ao ponto de início, é zero. A escolha do ponto inicial é totalmente arbitrário e o sentido pode ser horário ou anti-horário. A sinal de cada voltagem que contribui para a soma segue as seguintes regras:

1. A contribuição de uma impedância Z é negativa se a corrente I que passa por ela está no mesmo sentido do caminho escolhido para as somas de tensões: $-IZ$ e
2. é positiva se estão em sentidos opostos: $+IZ$.
3. A contribuição de uma bateria é positiva se o sentido escolhido passa do terminal negativo para o terminal positivo: $+V$ e
4. é negativa se o sentido escolhido passa do terminal positivo para o terminal negativo: $-V$.

2) A soma de todas as correntes que entram em qualquer nó do circuito de ser igual a soma de todas as correntes que saem do nó.

Aplicando estas regras ao circuito abaixo teremos o seguinte conjunto de equações:



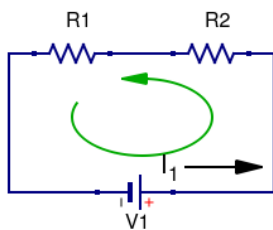
$$\begin{aligned}
 -I_3 R_4 + V_2 + I_1 R_3 + I_1 R_1 &= 0 \\
 I_2 R_2 - V_1 + I_2 R_5 - I_5 R_9 + I_3 R_5 &= 0 \\
 I_6 R_8 + I_6 R_7 - I_6 R_6 - V_2 + I_5 R_9 &= 0 \\
 I_2 - I_1 - I_3 &= 0 \\
 I_5 + I_3 - I_4 &= 0 \\
 I_6 - I_5 - I_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Este sistema de 6 equações e 6 variáveis é inhomogênea e portanto possui solução única. Ainda existem outras equações derivadas da aplicação das leis de Kirchoff entretanto, elas são combinações lineares das equações apresentadas acima.

4 Associação de resistores

$$R = \frac{V}{I}$$

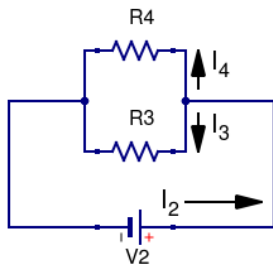
Associação em série:



$$V_1 - R_1 I_1 - R_2 I_1 = 0$$

$$\frac{V_1}{I_1} = R_{eq} = R_1 + R_2$$

Associação em paralelo:



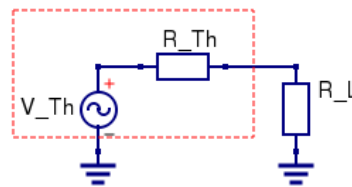
$$I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

$$\frac{I_2}{V_2} = \frac{I_3}{V_2} + \frac{I_4}{V_2}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

5 Teorema de Thévenin

Qualquer fonte de tensão pode ser visto como um resistor R_{Th} em série com uma fonte de tensão V_{Th} .

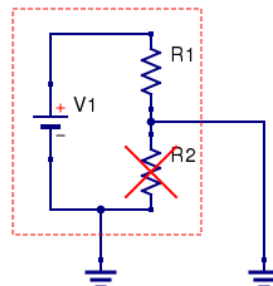
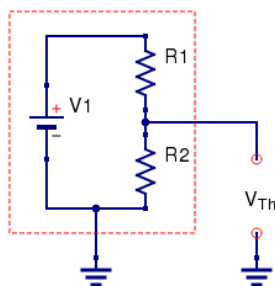
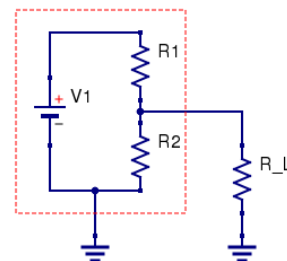


$$V_{Th} = V(\text{circuito aberto})$$

begin

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{Th}(\text{circuito fechado})}$$

Vamos considerar uma fonte de tensão baseada em um divisor de tensão:



$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{Th}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1$$

$$I_{Th} = \frac{V_1}{R_1}$$

Qual a resistência de carga R_L resultara na máxima potência sendo transferida para a carga para uma dada resistência da fonte R_{Th} ?

$$P = IV = \frac{V_L^2}{R_L} = \left(V_{Th} \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} \right)^2 \frac{1}{R_L} = V_{Th}^2 \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)^2}$$

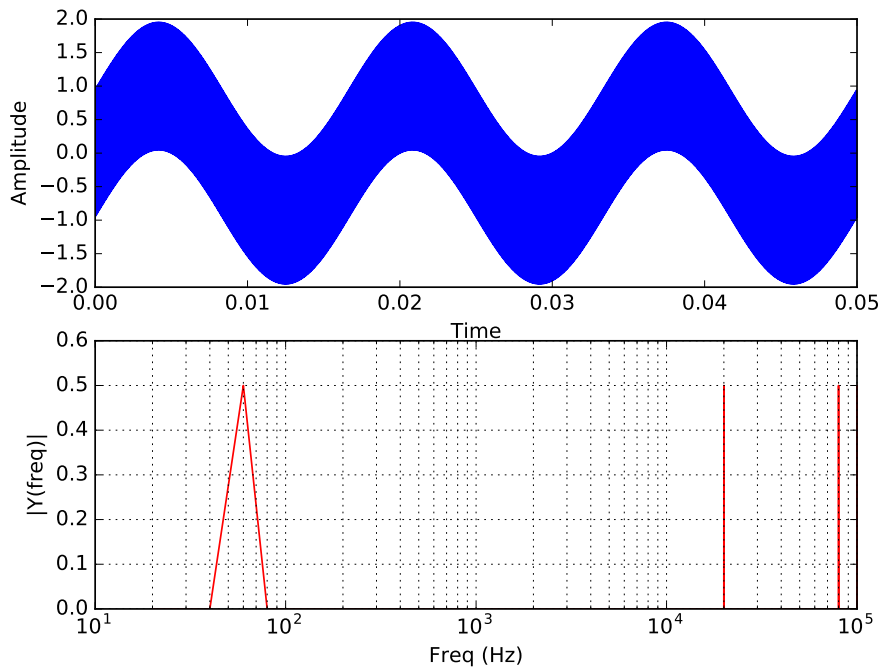
$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR_L} &= V_{Th}^2 \left[\frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2(R_{Th} + R_L)R_L}{(R_{Th} + R_L)^4} \right] = \\ &= \frac{V_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^4} (R_{Th}^2 + 2R_{Th}R_L + R_L^2 - 2R_{Th}R_L - 2R_L^2) = \\ &= \frac{V_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^4} (R_{Th}^2 - R_L^2) = 0 \rightarrow \boxed{R_L = R_{Th}} \end{aligned}$$

6 Princípio da superposição e Transformada de Fourier

De acordo com o teorema de Fourier, qualquer função periódica bem comportada pode ser representada por uma somatória de funções harmônicas. Considere uma função dependente do tempo t tal que $F(t) = F(t + T)$, em que T é o período da função. $F(t)$ pode ser escrita como:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad (1)$$

Este teorema é bastante útil pois podemos avaliar independentemente a amplitude de cada frequência, na transformada de Fourier, que compõe um determinado sinal sendo aplicado a um circuito antes e depois do circuito. O exemplo abaixo mostra uma função $F(t) = \sin(2\pi 60t) + \sin(2\pi 20.000t)$, gráfico superior, e a sua transformada de Fourier no gráfico inferior. Note os picos nos valores de 60 e 20.000 na transformada de Fourier.

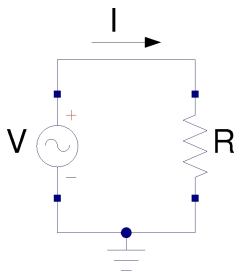


7 Impedância

A forma generalizada da razão $Z = \frac{V}{I}$ de um circuito qualquer é chamada de impedância. A impedância resultante da combinação de impedâncias em série ou em paralelo seguem as relações:

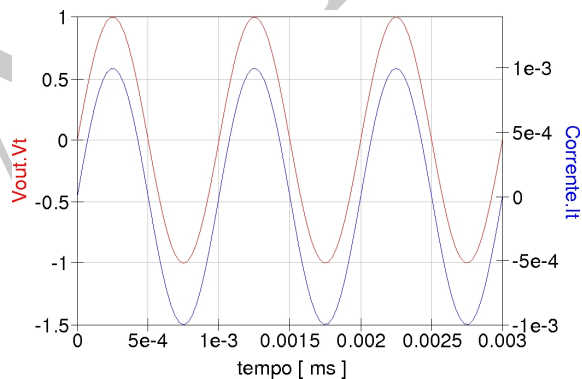
$$Z_{serie} = \sum Z_i \qquad \frac{1}{Z_{paralelo}} = \sum \frac{1}{Z_i}$$

7.1 Impedância de uma resistência

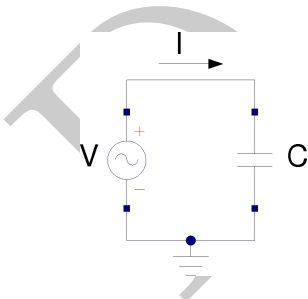


$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 e^{j\omega t} \\ I &= \frac{V}{R} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R} \end{aligned} \right\} \rightarrow Z_R = \frac{V}{I} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{\frac{V_0 e^{j\omega t}}{R}} = R \quad \boxed{Z_R = R}$$

Note ainda que a tensão e a corrente estão em fase em um resistor submetido à uma tensão variável, pois a corrente $I = \frac{V_0 e^{j\omega t + \phi}}{R} = \frac{V}{R} e^{\phi}$ com a fase $\phi = 0$. A figura ao lado ilustra este fato.

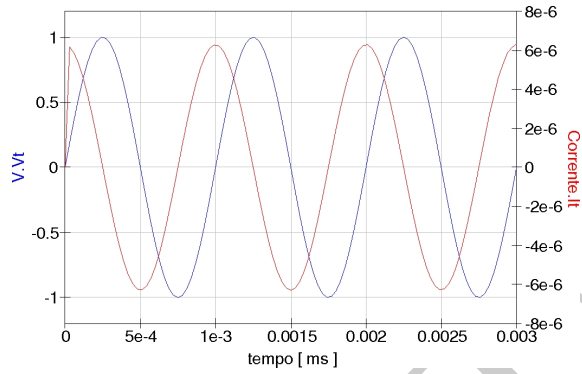


7.2 Impedância de um capacitor

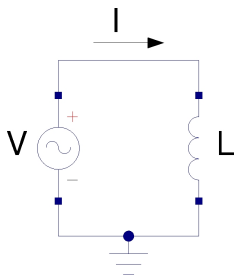


$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 e^{j\omega t} \\ I &= C \frac{dV}{dt} = C j\omega V_0 e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \rightarrow Z_C = \frac{V}{I} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{C j\omega V_0 e^{j\omega t}} \quad \boxed{Z_C = \frac{-j}{\omega C}}$$

Para o capacitor, a corrente está adiantada de $\frac{\pi}{2}$ em relação à tensão pois, usando $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, a corrente $I = Cj\omega V_0 e^{j\omega t} = C\omega V e^{j\phi}$ onde a fase $\phi = \frac{\pi}{2}$. A figura ao lado ilustra este fato.

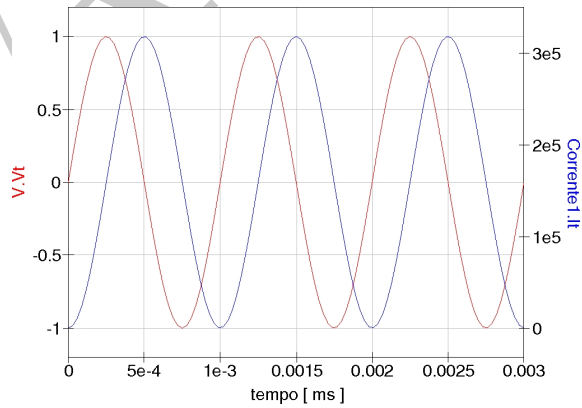


7.3 Impedância de um indutor

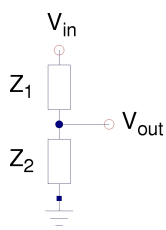


$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 e^{j\omega t} \text{ e } V = L \frac{dI}{dt} \\ I &= \frac{1}{L} \int V dt = \frac{1}{L} \int V_0 e^{j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j\omega L} V_0 e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{Z_L = j\omega L}$$

Para o indutor, a corrente está atrasada de $\frac{\pi}{2}$ em relação à tensão pois, usando $-j = e^{j(-\frac{\pi}{2})}$, a corrente $I = \frac{-j}{\omega L} V_0 e^{j\omega t} = \frac{V}{\omega L} e^{j\phi}$ onde a fase $\phi = -\frac{\pi}{2}$. A figura ao lado ilustra este fato.



7.4 Divisor de tensão generalizado

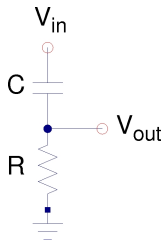


$$\left. \begin{aligned} Z_{total} &= Z_1 + Z_2 \\ I &= \frac{V_{in}}{Z_{total}} = \frac{V_{in}}{Z_1 + Z_2} \\ V_{out} &= Z_2 I = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_{in} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

7.5 Filtros passivos

7.5.1 High-pass filter



$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} \text{ e } Z_R = R$$

$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} = \frac{R}{R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega RC}}$$

Definindo a frequência crítica $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ temos $G = \frac{1}{1 - j \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)}$.

$$G = \frac{1}{1 - j \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \left(1 + j \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

O ganho na amplitude do sinal é dado por:

$$\sqrt{GG^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

A diferença de fase entre o sinal de entrada e o de saída é:

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\omega_0}{\omega} \right]$$

Note que se $\omega \ll \omega_0 \rightarrow G = 0$ (nada passa)

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow G = 1$ (tudo passa)

$$\omega = \omega_0 \rightarrow G = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

Para $\omega \ll \omega_0$ temos que o ganho pode ser aproximado como $G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$. Tomando

os valores de ω menores que ω_0 como $\omega = 10^{-n} \omega_0$, o ganho em dB é dados por: $G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} = 20 \log \frac{10^{-n} \omega_0}{\omega_0} = -20n \text{ dB}$ ou seja, quando reduzimos o valor da frequência do sinal por um fator 10, a atenuação é de 20 dB .

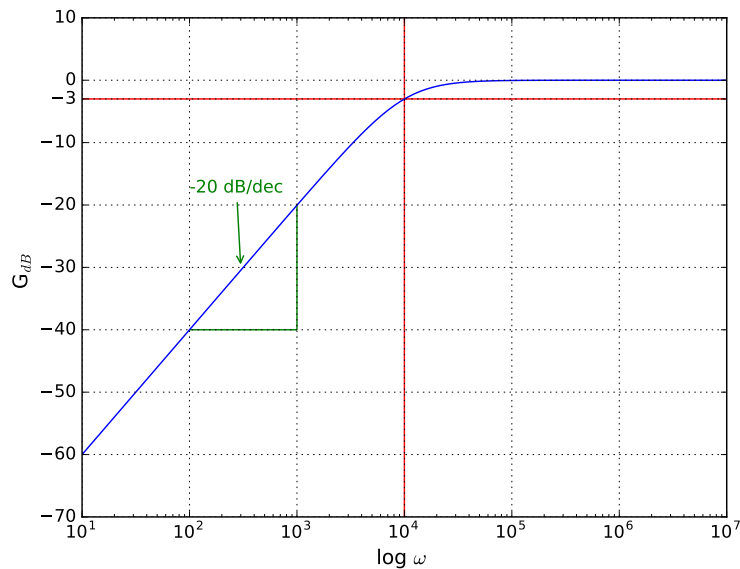


Figura 1: Diagrama de Bode do ganho do filtro passa alta.

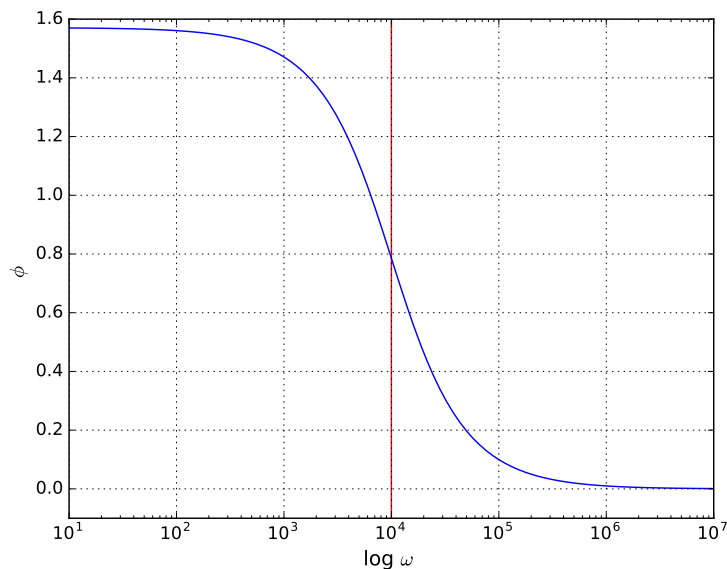
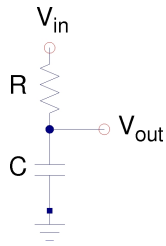


Figura 2: Diagrama de Bode da fase do filtro passa alta.

7.5.2 Low-pass filter



Este circuito é analogo ao do *High-pass filter*, sendo que neste caso a saída é dada por:

$$G = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}} = \frac{1}{1 - j\omega RC} = \frac{1}{1 - j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \text{ onde } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$G = \frac{1}{1 - j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Para o filtro passa baixa, o ganho G e a fase ϕ são dados por:

$$\sqrt{GG^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \right]$$

Note que se $\omega \gg \omega_0 \rightarrow G = 0$ (nada passa)

$\omega \ll \omega_0 \rightarrow G = 1$ (tudo passa)

$$\omega = \omega_0 \rightarrow G = \frac{1}{\sqrt{2}}, G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

Para $\omega \gg \omega_0$ temos que o ganho pode ser aproximado como $G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \approx \frac{\omega_0}{\omega}$.

Tomando os valores de ω maiores que ω_0 como $\omega = 10^n \omega_0$, o ganho em dB é dados por:

$G_{dB} = 20 \log \frac{\omega_0}{\omega} = 20 \log \frac{\omega_0}{10^n \omega_0} = -20n \text{ dB}$ ou seja, quando aumentamos o valor da frequência do sinal por um fator 10, a atenuação é de 20 dB.

O comportamento do filtro passa alta e passa baixa poderiam ter sido antecipadamente previstos considerando que capacitor se comporta como um curto para sinais com “alta” frequência e como um aberto para sinais de “baixa” frequência, em relação à $(RC)^{-1}$

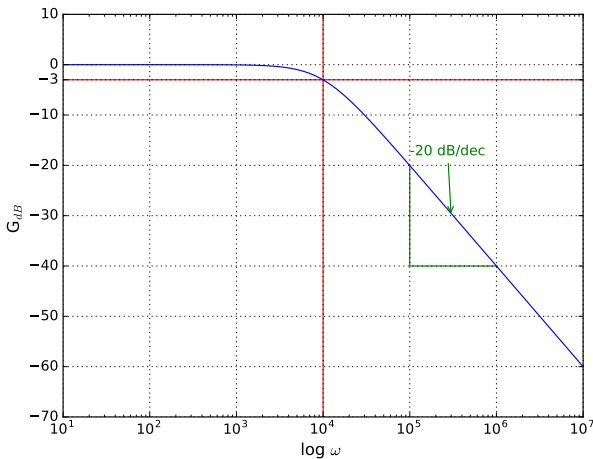


Figura 3: Diagrama de Bode do ganho do filtro passa baixa.

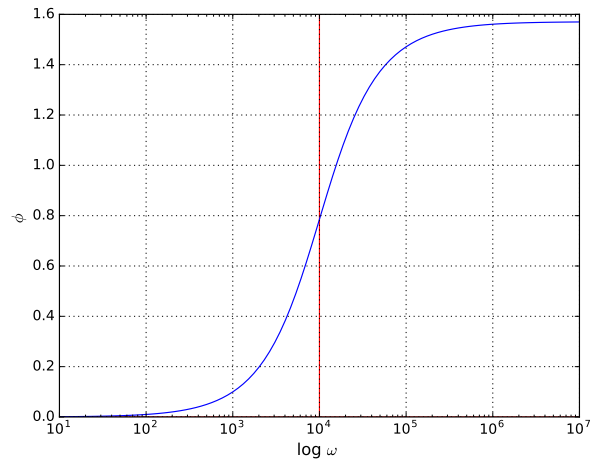
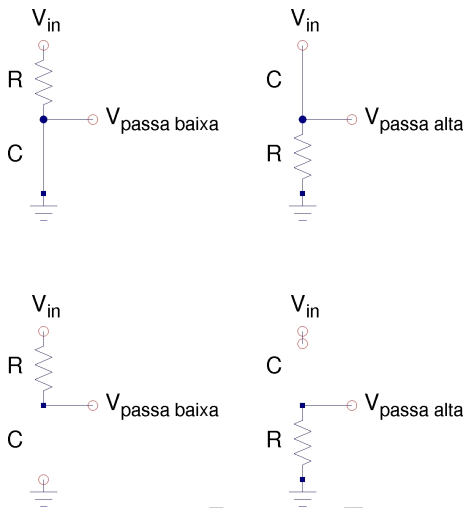


Figura 4: Diagrama de Bode da fase do filtro passa baixa.



“alta” frequência → capacitor como curto

$$V_{passa\ baixa} = 0$$

$$V_{passa\ alta} = V_{in}$$

“baixa” frequência → capacitor como aberto

$$V_{passa\ baixa} = V_{in}$$

$$V_{passa\ alta} = 0$$

7.5.3 Filtro passa banda

$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \left(\frac{V_{out}}{V_1} \right) \left(\frac{V_1}{V_{in}} \right) = G_{passa\ alta} G_{passa\ baixa} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}$$

Neste caso, a análise pode ser feita diretamente no ganho final ou considerando-se o ganho de cada bloco:

$$\omega \gg \omega_0 \rightarrow G = 0 \quad \text{ou} \quad G_{passa\ alta} = 1 \text{ e } G_{passa\ baixa} = 0 \rightarrow G = 1 \times 0 = 0$$

$$\omega \ll \omega_0 \rightarrow G = 0 \quad \text{ou} \quad G_{passa\ alta} = 0 \text{ e } G_{passa\ baixa} = 1 \rightarrow G = 0 \times 1 = 0$$

$$\omega = \omega_0 \rightarrow G = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad G_{passa\ alta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } G_{passa\ baixa} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow G = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$G_{dB} = 20 \log \frac{1}{2} = -6 \text{ dB}$$

Circuitos eletrônicos são usados como blocos conectados entre si, cada um operando sobre o sinal ou seja a saída de um é a entrada de outro. Nesse exemplo combinamos os filtros passa alta e passa baixa para obter um passa banda.

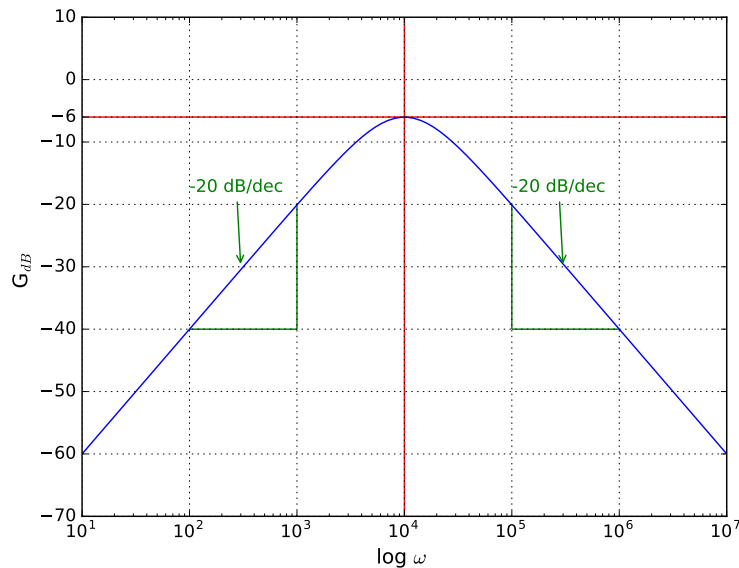
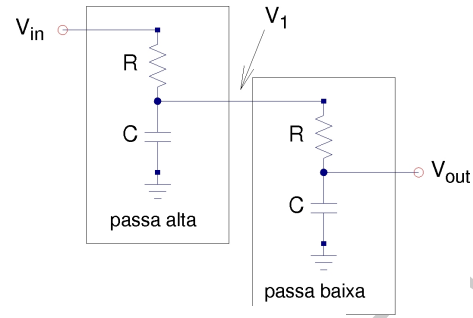


Figura 5: Diagrama de Bode do ganho do filtro passa banda RC.

Outra maneira conveniente de calcular o ganho total de um circuito é considerar o ganho em decibéis é definido como $G_{dB} = 20 \log_{10} G$ logo:

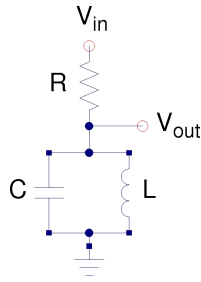
$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log_{10} G = 20 \log_{10} (G_{\text{passa alta}} G_{\text{passa baixa}}) = 20 \log_{10} G_{\text{passa alta}} + 20 \log_{10} G_{\text{passa baixa}} \\ &= G_{\text{passa alta}_{dB}} + G_{\text{passa baixa}_{dB}} \end{aligned}$$

Neste exemplo,

$$G_{dB}(\omega = \omega_0) = G_{\text{passa alta}_{dB}}(\omega = \omega_0) + G_{\text{passa baixa}_{dB}}(\omega = \omega_0) = (-3) + (-3) = -6$$

Aqui, por questão de simplicidade, foram usados filtros passa baixa e passa alta onde os resistores e capacitores são iguais. Entretanto combinações de filtros com valores de resistores e capacitores diferentes são naturalmente possíveis.

7.5.4 Filtro passa banda com indutor



$$\frac{1}{Z_{LC}} = \left(\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} \right) = \left(j\omega C - \frac{j}{\omega L} \right) = \frac{-j}{\omega L} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

$$G = \frac{Z_{LC}}{R + Z_{LC}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{LC}}} = \frac{1}{1 - j \frac{R}{\omega L} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2} \left(1 + j \frac{R}{\omega L} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right) \quad \text{onde } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Neste caso, o ganho é:

$$\sqrt{GG^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2}}$$

e a fase é

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left[\frac{R}{\omega L} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right]$$

Note que se $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow G = 0$ (nada passa)

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow G = 0$ (nada passa)

$\omega = \omega_0 \Rightarrow G = 1$ (tudo passa)

Este resultado poderia ter sido previsto somente olhando Z_{LC} pois,

$$\begin{array}{lll} \omega \gg \omega_0 \Rightarrow Z_{LC} = 0 & \text{(um curto devido ao capacitor)} & \rightarrow V_{out} = 0 \\ \omega \ll \omega_0 \Rightarrow Z_{LC} = 0 & \text{(um curto devido ao indutor)} & \rightarrow V_{out} = 0 \\ \omega = \omega_0 \Rightarrow Z_{LC} \rightarrow \infty & \text{(um aberto devido a ressonância LC)} & \rightarrow V_{out} = V_{in} \end{array}$$

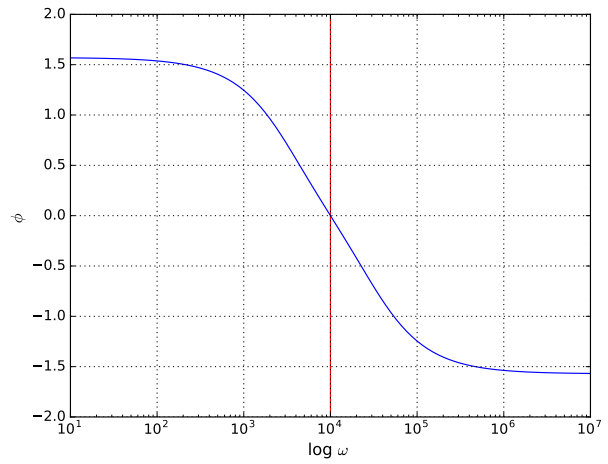
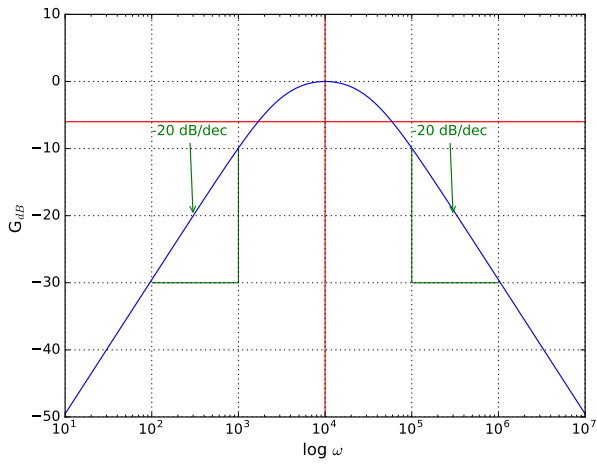
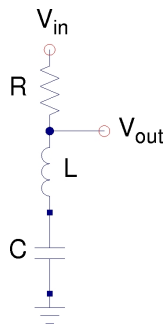


Figura 6: Diagrama de Bode do ganho do filtro passa banda RLC.

Figura 7: Diagrama de Bode da fase do filtro passa banda RLC.

DRAFT

7.5.5 Filtro corta banda



$$Z_{LC} = Z_L + Z_C = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{j}{\omega C} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)$$

$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_{LC}}{R + Z_{LC}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{LC}}} = \frac{1}{1 - j\omega RC \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right)^{-1}}$$

Exercício: Analise o ganho $\sqrt{GG^*}$ deste circuito para $\omega \gg \omega_0$, $\omega \ll \omega_0$ e $\omega = \omega_0$ e interprete os resultados estudando o comportamento esperado de Z_{LC} .

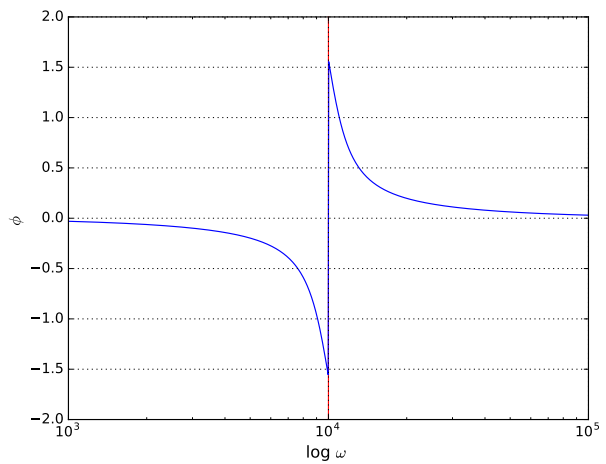
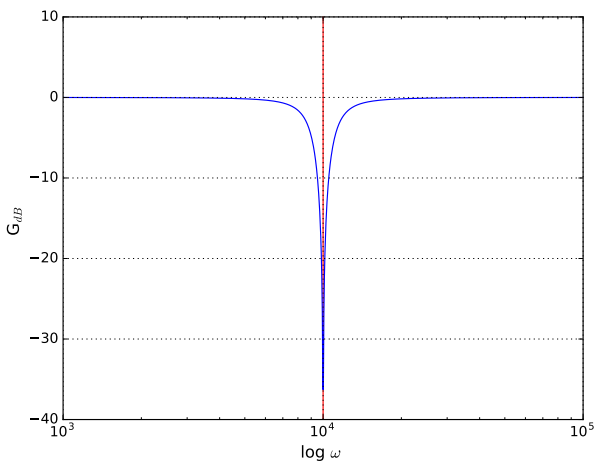
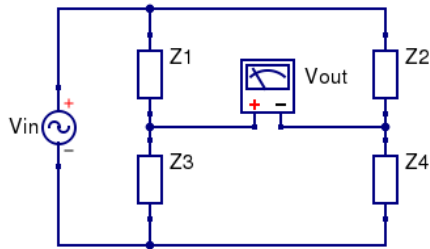


Figura 8: Diagrama de Bode do ganho do filtro corta banda RLC.

Figura 9: Diagrama de Bode da fase do filtro corta banda RLC.

7.6 Pontes

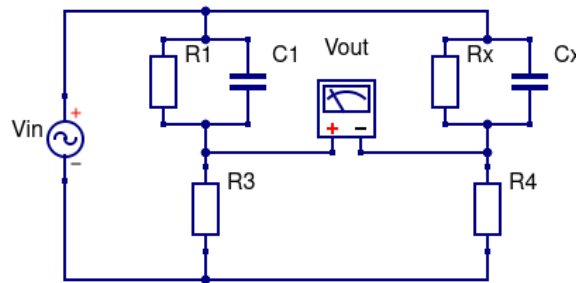


$$V_{out} = V_C - V_D = V_{in} \left[\frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} - \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4} \right]$$

Dizemos que a ponte está balanceada quando $V_{out} = 0$, ou seja, quando

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}$$

Vamos considerar o exemplo da ponte abaixo:



$$Z_3 = R_3 \quad \text{e} \quad Z_4 = R_4$$

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 = \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{R_1}$$

$$\frac{1}{Z_x} = \frac{1}{R_x} + j\omega C_x = \frac{1 + j\omega R_x C_x}{R_x}$$

No equilíbrio: $\frac{Z_3}{Z_1} = \frac{Z_4}{Z_2}$

$$R_3 \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{R_1} = R_4 \frac{1 + j\omega R_x C_x}{R_x}$$

$$R_x R_3 (1 + j\omega R_1 C_1) = R_1 R_4 (1 + j\omega R_x C_x)$$

$$R_x R_3 + j\omega R_1 R_3 R_x C_1 = R_1 R_4 + j\omega R_1 R_4 R_x C_x$$

Igualando as partes reais e imaginárias dos dois lados da igualdade temos:

$$R_x R_3 = R_1 R_4 \Rightarrow \boxed{R_x = \frac{R_4}{R_3} R_1}$$

$$\omega R_1 R_4 R_x C_x = \omega R_1 R_3 R_x C_1 \Rightarrow \boxed{C_x = \frac{R_3}{R_4} C_1}$$

DRAFT

7.7 Oscilador Amortecido

Queda de tensão ao longo do circuito:

$$V_L + V_R + V_C = V_1$$

$$\text{Como } \begin{cases} V_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2} \\ V_R = Ri = R \frac{dq}{dt} \\ V_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}q \end{cases}$$

$$\text{Temos } \begin{cases} V_L + V_R + V_C = V_1 \\ L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_1 \\ \frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = V_1 \end{cases}$$

$$\text{Em que } \begin{cases} \gamma = \frac{R}{2L} \quad \text{é a taxa de amortecimento do circuito e} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{é a frequência angular natural de oscilação do circuito} \end{cases}$$

Supondo uma solução exponencial do tipo $q(t) = q_0 e^{j\alpha t}$ para a parte homogênea da EDO, obtemos a equação:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0$$

Definindo:

$$\gamma = \frac{R}{2L} \text{ e } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

temos:

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

A solução desta equação implica em duas possibilidades para α :

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

e

$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

e a solução geral para $I(t)$ é então uma combinação linear destas duas possibilidades para α :

$$I(t) = C_1 e^{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}$$

7.7.1 Caso $\omega_0 > \gamma$

Se

$$\omega_0 > \gamma \implies \gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \implies \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Assim:

$$I(t) = C_1 e^{-\gamma + j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + C_2 e^{-\gamma - j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t}$$

Impondo as devidas condições de contorno obtemos:

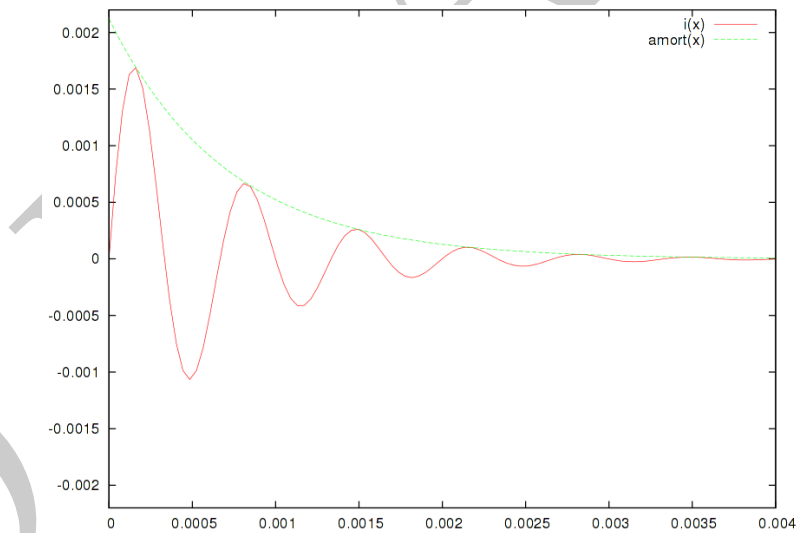
$$I(t) = \frac{V_0}{L\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \left[\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) t \right]$$

Note:

1) Termo de amortecimento: $e^{-\gamma t}$ - envelope

2) Oscilação harmônica: $\operatorname{sen} \left[\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \right) t \right]$ - $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

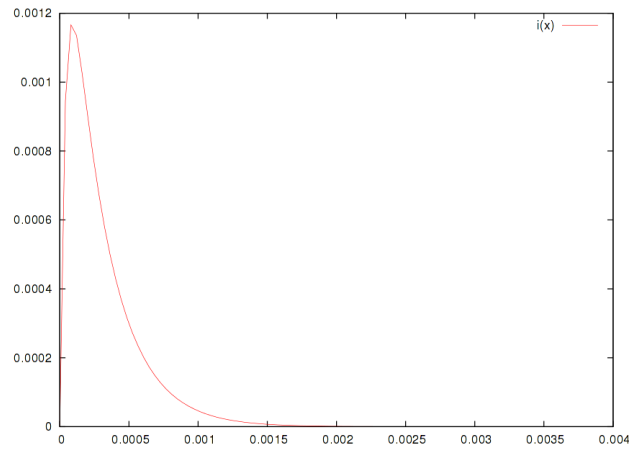
Exemplo usando $R = 140 \Omega$, $C = 0,22 \mu\text{F}$ e $L = 50 \text{ mH}$:



7.7.2 Caso $\omega_0 < \gamma$

$$I(t) = \frac{V_0}{L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \left[e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} - e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \right]$$

Exemplo usando $R = 1400 \Omega$, $C = 0,22 \mu\text{F}$ e $L=50 \text{ mH}$:



7.7.3 Caso $\omega_0 = \gamma$

$$I(t) = \frac{V_0}{L} t e^{-\gamma t}$$

Exemplo usando $C = 0,22 \mu\text{F}$ e $L=50 \text{ mH}$ e $\gamma = \omega_0$:

